

TESTE INTERMÉDIO - 11.º ANO - MATEMÁTICA A

19 de Maio de 2006

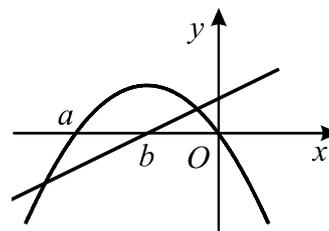
RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. No percurso de B para C , a distância do ponto P ao ponto A vai aumentando. No percurso de C para D , a distância do ponto P ao ponto A vai diminuindo. Passado o ponto D , a distância do ponto P ao ponto A nunca deixa de aumentar. Portanto, a função em causa começa por ser crescente, depois decresce, para, em seguida, ser novamente crescente.

Resposta **A**

2. Um dos zeros da função quadrática f é 0 . Designemos por a o outro zero desta função. Designemos por b o zero da função afim g .



Podemos elaborar o seguinte quadro:

x	$-\infty$	a		b		0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$g(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	+	0	-	n.d.	+	0	-

n.d. - não definida

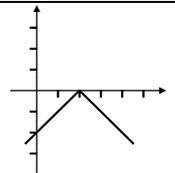
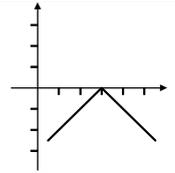
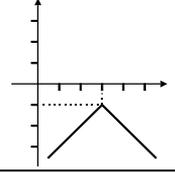
Do quadro resulta que o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ é

$$[a, b[\cup [0, +\infty[$$

Como só a alternativa **D** tem esta forma, concluímos ser esta a resposta correcta (sendo $a = -4$ e $b = -2$).

Resposta **D**

3. O gráfico da função g pode obter-se a partir do gráfico da função f por meio da seguinte composição de transformações:

Transformação	Novo Gráfico	Expressão da nova função
Simetria em relação ao eixo das abcissas.		$-f(x)$
Translação associada ao vector $(1, 0)$, ou seja, deslocamento de uma unidade, para a direita.		$-f(x-1)$
Translação associada ao vector $(0, -1)$, ou seja, deslocamento de uma unidade, para baixo.		$-f(x-1)-1$

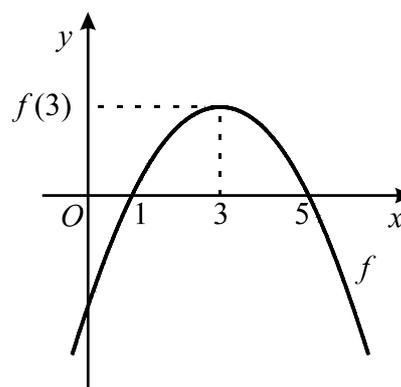
Portanto, $g(x) = -f(x-1) - 1$

Resposta D

4. Atendendo a que o conjunto solução da inequação $f(x) \geq 0$ é o intervalo $[1, 5]$, podemos concluir que os zeros de f são 1 e 5 e que o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

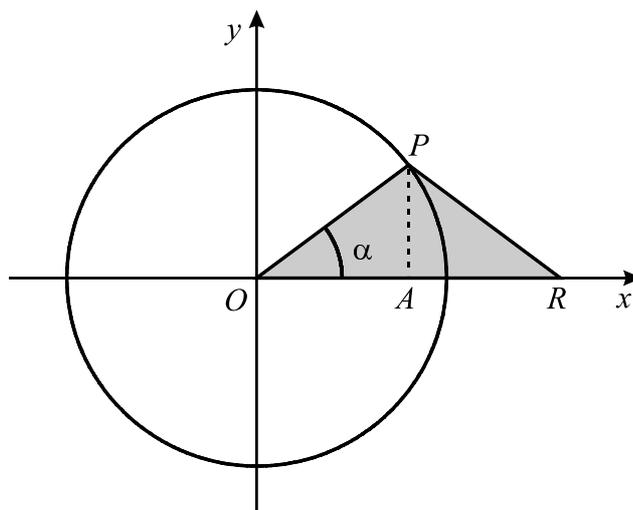
A abcissa do vértice da parábola é $\frac{1+5}{2} = 3$.

Deste modo, o contradomínio de f é o intervalo $] -\infty, f(3)]$.



Resposta D

5. Designemos por A o ponto médio do segmento $[OR]$.



Como o triângulo $[OPR]$ é isósceles, o segmento $[AP]$ é a altura relativa à base $[OR]$.

Tem-se que $\overline{OA} = \cos \alpha$, pelo que $\overline{OR} = 2 \cos \alpha$.

Por outro lado, $\overline{AP} = \sin \alpha$

$$\begin{aligned} \text{Área do triângulo } [OPR] &= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \\ &= \frac{\overline{OR} \times \overline{AP}}{2} = \frac{2 \times \cos \alpha \times \sin \alpha}{2} = \cos \alpha \times \sin \alpha \end{aligned}$$

Resposta A

6. Como $\cos \alpha < 0$ e $\operatorname{tg} \alpha > 0$ podemos concluir que o ângulo α pertence ao 3º quadrante. Neste quadrante, tem-se que $\sin \alpha < 0$.

Atendendo a que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ vem $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

Como $\sin \alpha < 0$, vem $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

Resposta B

7. Dado que β é uma solução da equação $\sin x = \frac{1}{5}$, tem-se $\sin \beta = \frac{1}{5}$

Portanto, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\sin \beta = -\frac{1}{5}$

Conclui-se assim que $\frac{\pi}{2} + \beta$ é uma solução da equação $\cos x = -\frac{1}{5}$

Resposta B

Grupo II

1.1. $f(x) \leq -1 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{1-x} \leq -1 \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4-3x}{1-x} \leq 0$

x	$-\infty$	1		$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$4-3x$	+	+	+	0	-
$1-x$	+	0	-	-	-
$\frac{4-3x}{1-x}$	+	n.d.	-	0	+

n.d. - não definida

Por observação do quadro, conclui-se que o conjunto pedido é $\left]1, \frac{4}{3}\right]$

1.2. O gráfico da função f tem uma assíntota vertical cuja equação é $x = 1$ e uma assíntota horizontal cuja equação é $y = 2$

2. Designemos por x o número de hectares de trigo e por y o número de hectares de milho.

Função objectivo: $L = 600x + 500y$

Restrições:

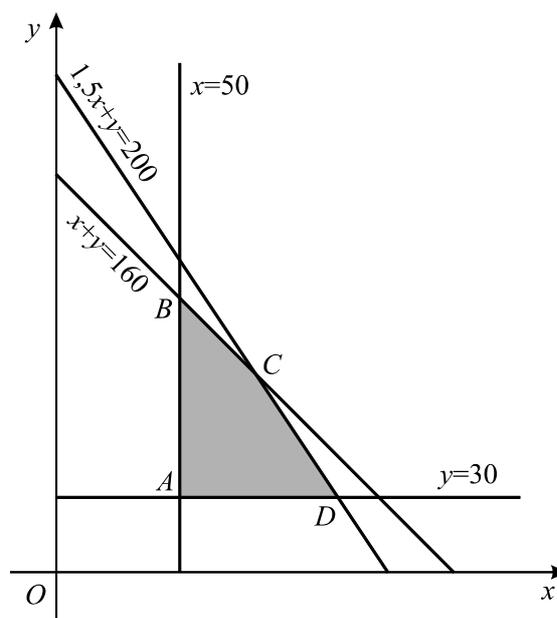
$$x + y \leq 160$$

$$x \geq 50$$

$$y \geq 30$$

$$1500x + 1000y \leq 200\,000 \quad (\text{equivalente a } 1,5x + y \leq 200)$$

A intersecção dos semiplanos definidos pelas inequações que exprimem as restrições é a região admissível. Graficamente, temos

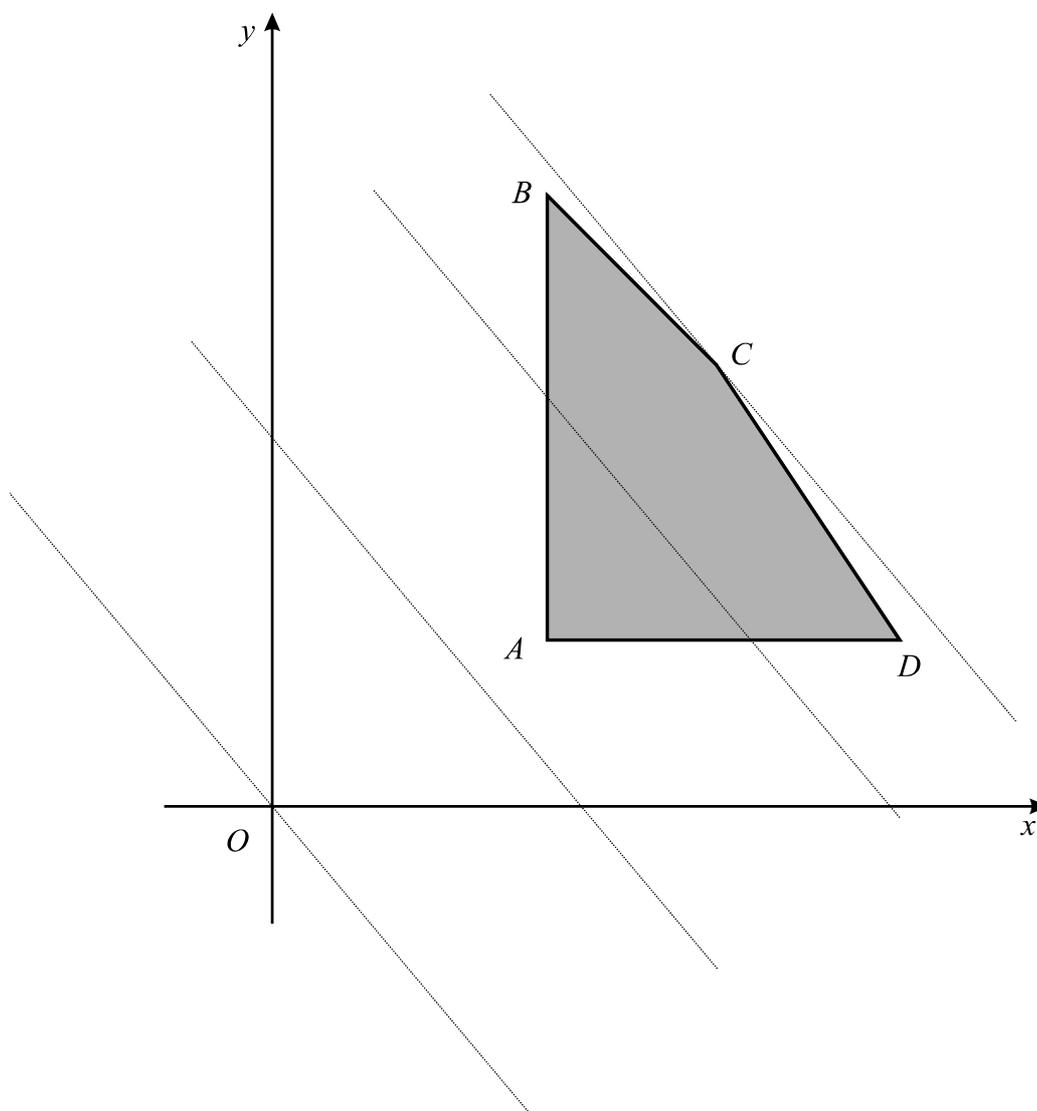


A região admissível tem quatro vértices: A , B , C e D .

Tem-se que:

Vértice	Intersecção das rectas de equações	Coordenadas
A	$x = 50$ e $y = 30$	$(50, 30)$
B	$x = 50$ e $x + y = 160$	$(50, 110)$
C	$x + y = 160$ e $1,5x + y = 200$	$(80, 80)$
D	$y = 30$ e $1,5x + y = 200$	$(340/3, 30)$

Como a função objectivo é $L = 600x + 500y$, vamos traçar a recta de equação $600x + 500y = 0$ e vamos deslocá-la paralelamente a si própria.



Constata-se que a solução óptima é atingida no vértice $C(80, 80)$.

Em alternativa, podemos calcular o valor da função objectivo nos vértices (dado que a função objectivo tem o seu valor máximo num vértice da região admissível).

Vértice	x	y	$600x + 500y$	L
A	50	30	$600 \times 50 + 500 \times 30$	45 000
B	50	110	$600 \times 50 + 500 \times 110$	85 000
C	80	80	$600 \times 80 + 500 \times 80$	88 000
D	$340/3$	30	$600 \times 340/3 + 500 \times 30$	83 000

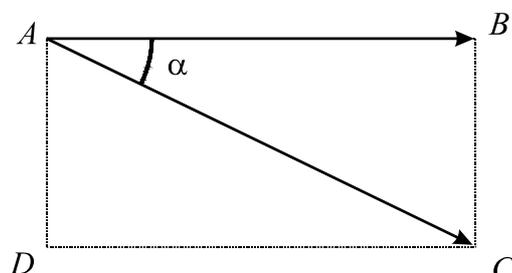
Observando os valores da tabela, concluímos que a solução óptima é atingida no vértice $(80, 80)$.

Portanto, para maximizar o lucro, o agricultor deve semear 80 hectares de trigo e 80 hectares de milho.

3. Tem-se que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) =$
 $= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 0 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overline{AB}^2$

Em alternativa, apresenta-se a seguinte resolução:

Seja α o ângulo dos vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC}



Tem-se que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos \alpha$

Atendendo a que $\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ e a que

$\|\overrightarrow{AB}\| = \overline{AB}$ e $\|\overrightarrow{AC}\| = \overline{AC}$, vem

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC} \times \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \overline{AB} \times \overline{AB} = \overline{AB}^2$

4.1.

Uma recta é perpendicular a um plano se for perpendicular a duas rectas concorrentes contidas no plano. Portanto, uma recta é perpendicular a um plano se um vector director da recta for perpendicular a dois vectores não colineares do plano.

Consideremos então um vector director da recta dada e verifiquemos que esse vector é perpendicular aos vectores \overrightarrow{ST} e \overrightarrow{SV} .

Como a recta é definida pela condição $x = 0 \wedge y = 2z$, tem-se que os pontos $(0, 0, 0)$ e $(0, 2, 1)$ pertencem à recta, pelo que o vector

$$\vec{u} = (0, 2, 1) - (0, 0, 0) = (0, 2, 1)$$

é um vector director da recta.

Por outro lado, como $[RSTU]$ é um quadrado de área igual a 4, tem-se que $\overline{ST} = 2$, pelo que as coordenadas de S e de T são, respectivamente, $(1, 1, 0)$ e $(-1, 1, 0)$.

Portanto,

$$\overrightarrow{ST} = T - S = (-1, 1, 0) - (1, 1, 0) = (-2, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{SV} = V - S = (0, 0, 2) - (1, 1, 0) = (-1, -1, 2)$$

Vejamos então se o vector \vec{u} é perpendicular aos vectores \overrightarrow{ST} e \overrightarrow{SV} . Tem-se:

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{ST} = (0, 2, 1) \cdot (-2, 0, 0) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{SV} = (0, 2, 1) \cdot (-1, -1, 2) = 0 - 2 + 2 = 0$$

Concluimos que o vector \vec{u} é perpendicular aos vectores \overrightarrow{ST} e \overrightarrow{SV} , pelo que a recta dada é perpendicular ao plano STV .

Equação do plano

Um vector normal ao plano: $\vec{u} = (0, 2, 1)$

Um ponto do plano: $(1, 1, 0)$

Uma equação do plano: $0(x - 1) + 2(y - 1) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2y - 2 + z = 0 \Leftrightarrow 2y + z = 2$

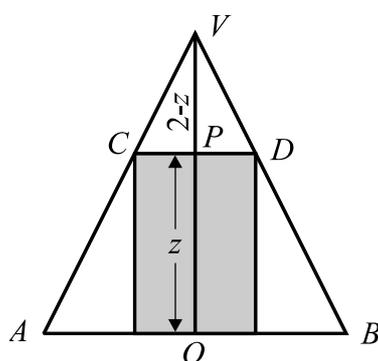
4.2.1.

O ponto P desloca-se ao longo do segmento $[OV]$, nunca coincidindo com o ponto O , nem com o ponto V . Sendo assim, a cota do ponto P varia entre a cota do ponto O , que é 0, e a cota do ponto V , que é 2.

O domínio da função f é, portanto, o intervalo $]0, 2[$.

Com vista a determinar uma expressão que defina a função f , comecemos por determinar o raio r do cilindro, em função de z .

Na figura está representada a secção, da pirâmide e do cilindro, obtida pela intersecção destes com o plano yOz .



De acordo com este esquema, e atendendo a que os triângulos $[VPD]$ e $[VOB]$ são semelhantes, podemos escrever

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{VP}}{\overline{VO}} \Leftrightarrow \frac{r}{1} = \frac{2-z}{2} \Leftrightarrow r = \frac{2-z}{2}$$

O volume do cilindro, em função de z , será, então

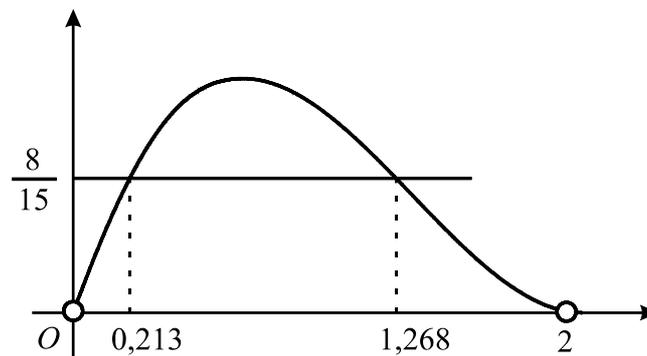
$$\begin{aligned} f(z) &= A_{base} \times altura = \\ &= \pi \times r^2 \times z = \\ &= \pi \times \left(\frac{2-z}{2} \right)^2 \times z = \\ &= \pi \times \frac{z^2 - 4z + 4}{4} \times z = \\ &= \pi \times \frac{z^3 - 4z^2 + 4z}{4} = \pi \left(\frac{z^3}{4} - z^2 + z \right) \end{aligned}$$

4.2.2.

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \times altura}{3} = \frac{4 \times 2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$f(z) > \frac{1}{5} \times \frac{8}{3} \Leftrightarrow f(z) > \frac{8}{15}$$

Com o objectivo de resolver graficamente a inequação $f(z) > \frac{8}{15}$, obteve-se, na calculadora, o gráfico da função f e a recta de equação $y = \frac{8}{15}$



Da observação do gráfico, podemos concluir que a cota do ponto P deve variar entre $0,213$ e $1,268$.