

Proposta de Resolução do Exame de Matemática A

Cod. 635 – 1ª Fase 2008

Grupo I

Versão 1

1	2	3	4	5	6	7	8
B	C	C	D	B	C	B	B

Versão 2

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	B	A	C	B	C	C

Grupo II

1.1. $-z_1$ será uma raiz cúbica de z_2 se $(-z_1)^3 = z_2$.

Ora $-z_1 = -1 + \sqrt{3}i$.

Como $|-z_1| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$ e o afixo do complexo pertence ao 2º quadrante e $\text{tg}(\arg(-z_1)) = -\sqrt{3}$ então $-z_1 = 2 \text{ cis } \frac{2\pi}{3}$

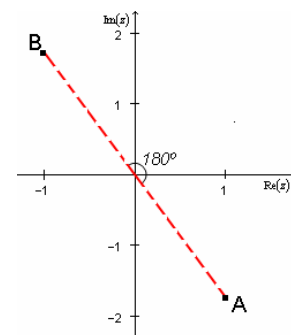
Vem $(-z_1)^3 = (2 \text{ cis } \frac{2\pi}{3})^3 = 2^3 \text{ cis } (3 \times \frac{2\pi}{3}) = 8 \text{ cis } (2\pi) = 8 \text{ cis } 0 = z_2$

1.2. Como

$$z_3 = z_1 \times i^{46} = z_1 \times (i^4)^{11} \times i^2 = -z_1$$

os pontos A e B, respectivamente afixos de z_1 e de z_3 , são simétricos em relação à origem do referencial.

Daí $\overline{AB} = 2 \times |-z_1| = 4$



2.1. Considerando que foram feitas mil rifas:

Seja A o acontecimento "a rifa premiada tem um único algarismo 5".

Tendo em consideração que estamos em presença de acontecimentos equiprováveis

$$P(A) = \frac{\text{n.º de casos favoráveis}}{\text{n.º de casos possíveis}}$$

n.º de casos possíveis = $10 \times 10 \times 10$

$$\begin{array}{r} 5 \quad _ \quad _ \\ _ \quad 5 \quad _ \\ _ \quad _ \quad 5 \end{array}$$

n.º de casos favoráveis = $3 \times 9 \times 9$

Então

$$P(A) = \frac{3 \times 9 \times 9}{10 \times 10 \times 10} = \frac{243}{1000} = 0,243$$

isto é, a probabilidade de a rifa premiada ter um único algarismo 5 é 0,24 (com aproximação às centésimas).

2.2. Sendo a turma constituída por 12 raparigas e 10 rapazes, como a comissão tem que ter obrigatoriamente 3 raparigas e 2 rapazes, o número total de comissões diferentes que satisfaçam esta condição é dada por ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2$, uma vez que se está a escolher independentemente e sem preocupações de ordenação 3 raparigas e 2 rapazes.

Se retirarmos a estas comissões aquelas a que a Ana e o Miguel pertencem em simultâneo obtemos as comissões pretendidas.

Estando a Ana e o Miguel em simultâneo na comissão há lugar para 2 raparigas escolhidas entre as restantes 11 e 1 rapaz escolhido entre os 9 restantes.

Assim sendo, o número de comissões a que eles pertencem em simultâneo é dado por ${}^{11}C_2 \times {}^9C_1$.

Então, ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9$ é o número de comissões em que a Ana e o Miguel não fazem parte em simultâneo.

3. Sabendo que a probabilidade da bola retirada da caixa B ser azul é igual a $\frac{1}{2}$ e que há apenas bolas azuis e verdes dentro da caixa com igual probabilidade de serem retiradas, então terá que haver na caixa B o mesmo número de bolas verdes e azuis.

Dado que inicialmente havia dentro da caixa B menos 1 bola verde do que azuis então a bola recebida da caixa A teve que ser necessariamente verde.

4. A existirem assíntotas verticais apenas poderão ser as rectas de equação $x = -\pi$ ou $x = 0$ dado que a função f é contínua em $]-\pi, 0[$ e em $]0, +\infty[$.

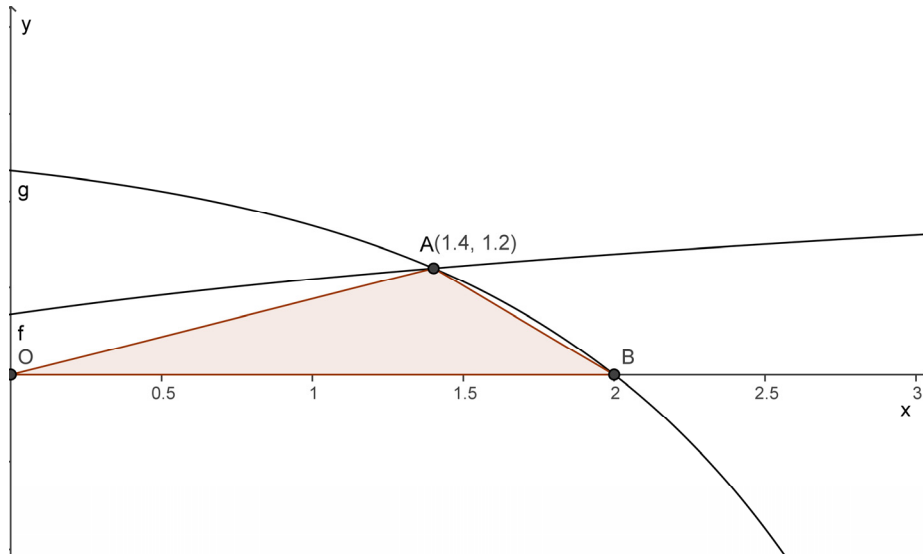
Sendo $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \frac{3 \operatorname{sen} \pi}{(-\pi)^2} = 0$, a recta de equação $x = -\pi$ não é assíntota vertical.

Sendo $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(3 \times \frac{\operatorname{sen} \pi}{x} \times \frac{1}{x} \right) = 3 \times 1 \times (-\infty) = -\infty$, então a recta de equação $x = 0$ é assíntota vertical.

Tendo em consideração o domínio da função (intervalo de números reais limitado à esquerda), calcula-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ para averiguar se existe alguma assíntota horizontal.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-4x+1} = 0$, então a recta de equação $y = 0$ é a assíntota horizontal.

5.



A área do triângulo [OAB] é dada por $\frac{2,0 \times 1,2}{2} \approx 1,2$ unidades de área (com aproximação às décimas).

6. 1. Para estudarmos a monotonia da função h vamos estudar o sinal da sua derivada.

$h'(x) = -1 + \frac{1}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$ para $x > -1$. Fazendo o quadro de sinais vem

	-1		0	$+\infty$
$-x$	n.d.	+	0	-
$x+1$	n.d.	+	+	+
$h'(x)$	n.d.	+	0	-

donde

	-1		0	$+\infty$
h'	n.d.	+	0	-
h	n.d.	↗	Máx	↘

Pode-se, então, concluir que a função é monótona crescente em $]-1, 0[$, é monótona decrescente em $]0, +\infty[$ e tem máximo igual a $h(0)$, isto é, igual a 4 para $x = 0$ já que a função é contínua em $]-1, +\infty[$, por se tratar da soma de duas funções contínuas.

6.2. Como a função h é contínua em $]-1, +\infty[$ então é contínua em $[5, 6]$. Sendo $h(5) = -1 + \ln 6 \approx 0,79$, portanto um número positivo e $h(6) = -2 + \ln 7 \approx -0,05$ um número negativo, o Teorema de Bolzano garante-nos que terá que haver pelo menos um $\alpha \in]5, 6[$, tal que $h(\alpha) = 0$.

7.1. $N(0) = \frac{2000}{1+199 \times 1} = 10$. Significa que foram 10 sócios que constituíram a associação.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{2000}{1+199 \times 0} = 2000$. Significa que o número de sócios ao longo dos anos tende a estabilizar à volta dos 2000.

7.2. Averiguemos quando o número de sócios é 1000. Precisamos resolver para $t > 0$ a equação $N(t) = 1000$.

$$N(t) = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+199 \times e^{-0,01t}} = 1000 \Leftrightarrow 1+199 \times e^{-0,01t} = 2 \Leftrightarrow e^{-0,01t} = \frac{1}{199} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,01t = \ln\left(\frac{1}{199}\right) \Leftrightarrow t \approx 529,33$$

Assim, ao fim de 530 dias comemorou-se a inscrição do sócio número 1000.