

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO
SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2.ª FASE – 22 DE JULHO DE 2024**

1.

1.1.

Como a reta que passa no ponto A é paralela à reta FC sabe-se que as retas têm a mesma direção, ou seja, os vetores diretores destas são colineares.

Na opção A não existe nenhum k de tal modo que $(1, -5, 0) = k(-5, -1, 7)$ e na opção B também não existe nenhum k de tal modo que $(-1, 5, 0) = k(-5, -1, 7)$.

Neste sentido, das quatro opções, só as opções C e D apresentam vetores diretores colineares ao da reta FC , considerando $k = -1$.

Verifiquemos qual destas retas contém o ponto A .

Como o ponto A pertence ao semieixo positivo Oy e $\overline{OA} = 4$, temos o ponto A com as coordenadas $(0, 4, 0)$.

Atendendo à equação vetorial da opção C , sabe-se que os pontos desta reta têm as coordenadas da forma:

$$(-10 + 5k, 2 + k, 14 - 7k), k \in \mathbb{R}$$

Assim, verifiquemos se existe algum valor k que devolva as coordenadas do ponto A :

$$(0, 4, 0) = (-10 + 5k, 2 + k, 14 - 7k) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -10 + 5k \\ 4 = 2 + k \\ 0 = 14 - 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

Como existe um valor de k que verifica a condição, podemos concluir que o ponto A pertence a esta reta.

Resposta correta: (C)

1.2.

Atendendo aos dados do enunciado, sabe-se que:

$$A(0, 4, 0), \quad F(x, y, 0) \quad \text{e} \quad C(0, y, z)$$

Para que a superfície esférica contenha todos os vértices do cubo $[ABCDEFGH]$ o centro desta será no ponto médio do segmento de reta $[FC]$ e o valor do diâmetro é igual ao seu comprimento, \overline{FC} .

Começemos por determinar as coordenadas dos pontos F e C .

Sendo $(x, y, z) = (-5, 2, 14) + k(-5, -1, 7), k \in \mathbb{R}$ a equação vetorial da reta FC , temos os pontos F e C com as suas coordenadas na forma:

$$(-5 - 5k, 2 - k, 14 - 7k), \quad k \in \mathbb{R}$$

Determinemos as coordenadas do ponto F :

$$(x, y, 0) = (-5 - 5k, 2 - k, 14 - 7k) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 - 5k \\ y = 2 - k \\ 0 = 14 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 - 5(-2) \\ y = 2 - (-2) \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ k = -2 \end{cases}$$

Assim, as coordenadas do ponto F são: $(5, 4, 0)$.

Passemos a determinar as coordenadas do ponto C :

$$(0, y, z) = (-5 - 5k, 2 - k, 14 - 7k) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -5 - 5k \\ y = 2 - k \\ z = 14 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 3 \\ z = 7 \end{cases}$$

Logo, as coordenadas do ponto C são: $(0, 3, 7)$.

Sendo o centro da superfície esférica o ponto médio de $[FC]$, temos:

$$\left(\frac{0+5}{2}, \frac{3+4}{2}, \frac{7+0}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Relativamente ao raio da superfície esférica, temos:

$$\frac{d(C, F)}{2} = \frac{\sqrt{(0-5)^2 + (3-4)^2 + (7-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{75}}{2}$$

Desta forma, a equação cartesiana reduzida é: $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$

2.

Segundo o enunciado, sabemos que:

$$u_1 + u_5 = 26 \quad \text{e} \quad u_9 = 31$$

Tratando-se de uma progressão aritmética conseguimos determinar, através da resolução do seguinte sistema, o valor do primeiro termo, u_1 , e da razão, r .

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_5 = 26 \\ u_9 = 31 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4r = 26 \\ u_1 + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 4r = 26 \\ u_1 + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2r = 13 \\ u_1 + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 13 - 2r \\ 13 - 2r + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 13 - 2r \\ 6r = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 13 - 2 \times 3 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ r = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, determinemos o termo geral de (u_n) :

$$u_n = 7 + (n - 1) \times 3 \Leftrightarrow u_n = 3n + 4$$

Para verificar se 835 é termo de (u_n) , façamos:

$$u_n = 835 \Leftrightarrow 3n + 4 = 835 \Leftrightarrow 3n = 831 \Leftrightarrow n = \frac{831}{3} \Leftrightarrow n = 277$$

Como a solução da equação é um número natural podemos concluir que 835 é o termo de ordem 277.

3.

A área do trapézio é dada por:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB}$$

Tem-se que:

$$A(a, 0), \quad B(a + 4, 0), \quad C(a + 4, \log_{2a}(a + 4)), \quad D(a, \log_{2a}a)$$

E assim sendo,

$$\overline{AD} = y_D - y_A = \log_{2a}a; \quad \overline{BC} = y_C - y_B = \log_{2a}(a + 4); \quad \overline{AB} = x_B - x_A = a + 4 - a = 4$$

Logo,

$$A_{[ABCD]} = \frac{\log_{2a}a + \log_{2a}(a + 4)}{2} \times 4 = 2\log_{2a}(a^2 + 4a)$$

Igualando a 4, como pretendido no enunciado:

$$\begin{aligned} 2\log_{2a}(a^2 + 4a) = 4 &\Leftrightarrow \log_{2a}(a^2 + 4a) = 2 \stackrel{(a>1)}{\Leftrightarrow} a^2 + 4a = (2a)^2 \Leftrightarrow a^2 + 4a = 4a^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow a \cdot (-3a + 4) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Donde se conclui que $a = \frac{4}{3}$, pois $a > 1$.

4.

Introduzindo os dados numa calculadora, obtém-se:

Mediana da remuneração média mensal dos homens: 904,6

Amplitude interquartil da remuneração média mensal dos homens: $990,1 - 674,7 = 315,4$

Em 2015, a remuneração base média mensal das mulheres é de 825, e em 2020, é de 960,3, aumentando, 135,3, isto é, há um aumento percentual de 16,4% $\left(= \frac{960,3-825}{825} \times 100 \right)$

O coeficiente de correlação linear das variáveis x e y , arredondado às milésimas é 0,998.

Sendo assim, em I, a opção é c); em II, a opção é a); em III, a opção é b); e, em IV, a opção é c).

5.

Tem-se que $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} = 27$, e como o triângulo $[PQR]$ é retângulo, com ângulo reto em R , logo

$$\|\overrightarrow{QR}\| \times \|\overrightarrow{QP}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 27$$

Como o raio da circunferência é 3 (o diâmetro é 6) e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen } \alpha$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{QR}\| \times 6 \times \text{sen } \alpha &= 27 \Leftrightarrow \\ \text{sen } \alpha &= \frac{27}{6 \times \|\overrightarrow{QR}\|} = \frac{9}{2 \times \|\overrightarrow{QR}\|} \quad (I) \end{aligned}$$

Sendo $[PQR]$ um triângulo retângulo, tem-se que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\|\overrightarrow{QR}\|}{6} \quad (II)$$

Igualando (I) e (II), obtém-se:

$$\frac{9}{2 \times \|\overrightarrow{QR}\|} = \frac{\|\overrightarrow{QR}\|}{6} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{QR}\|^2 = 27 \xLeftrightarrow[\|\overrightarrow{QR}\| > 0] \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{27}$$

Tomando (II), tem-se que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{27}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conclui-se que como α é um ângulo agudo então $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

6.

6.1.

A reta de equação $y = 3x - 5$ é assíntota ao gráfico da função g , quando $x \rightarrow +\infty$.

Logo temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (3x - 5)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 3x + 5) = 0$$

6.2.

Como a função g é contínua em $x = 0$, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$$

Assim:

$$g(0) = f(0) = 2$$

Como f é contínua em $[0, +\infty[$, logo é contínua em $x = 0$

Temos então que.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

Temos também que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-k}(e^x - 1)}{-x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-k}(e^x - 1)}{x(-x + 2)} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{(\text{limite notável})} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-k}}{-x + 2} = \\ &= 1 \times \frac{e^{-k}}{2} = \frac{e^{-k}}{2} \end{aligned}$$

Para g ser contínua em $x = 0$ então:

$$\frac{e^{-k}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{-k} = 4 \Leftrightarrow -k = \ln 4 \Leftrightarrow k = -\ln 4 \text{ (ou equivalente)}$$

7.

7.1.

O número de casos possíveis é 6^3 .

Para contar os casos favoráveis importa observar os múltiplos de 3 nas duas faces voltadas para cima podem ser ambos 3, ambos 6 ($\binom{3}{0}C_2 \times 2$ casos) ou um 6 e um 3 ($\binom{3}{1}A_2$ casos), ficando 4 possibilidades para a outra face, 1, 2, 4 ou 5.

Assim, o número de casos favoráveis pode ser dado por $(\binom{3}{0}C_2 \times 2 + \binom{3}{1}A_2) \times 4$

Deste modo, o valor da probabilidade pedida é $\frac{(\binom{3}{0}C_2 \times 2 + \binom{3}{1}A_2) \times 4}{6^3} = \frac{48}{196} = \frac{2}{9}$

Resposta correta: (D)

7.2.

Para que o número de 6 algarismos seja inferior a 300000, o algarismo das centenas de milhar poderá ser 1 ou 2. Por outro lado, o algarismo das unidades poderá ser 2, 4 ou 6, uma vez que o número é par, mas 2 e 4 terão de estar juntos.

Uma vez que os algarismos do número são todos diferentes, considerem-se as duas situações relativas ao algarismo inicial:

Contabilização dos números que começam em 2:

Nesta situação, 4 tem de ser o algarismo seguinte e 6 será o algarismo das unidades, havendo 3 lugares para colocar os algarismos ímpares, por qualquer ordem. Há portanto $3!$ números que começam por 2.

Contabilização dos números que começam em 1:

Nesta situação, os algarismos 2 e 4 poderão, em par, em 4 posições diferentes, conforme se observa no esquema da figura.



Quando o par ocupa as unidades e as dezenas, o número pode terminar em 24 ou 42 e os restantes algarismos, 3, 4 e 6 podem ocupar os outros 3 lugares, por qualquer ordem. Há, assim, $1 \times 3! \times 2$ números destes.

Quando nenhum dos algarismos 2 ou 4 ocupa o lugar das unidades, este será ocupado pelo algarismo 6. Neste caso, o número começa por 1 e termina em 6. Há 3 lugares para o par formado pelos algarismos 2 e 4, os quais podem estar dispostos por duas ordens distintas. Restam 2 lugares para os algarismos 3 e 5, os quais podem estar dispostos por duas ordens distintas também. Por isso, há $3 \times 2 \times 2$ números destes.

Assim, a quantidade de números nas condições enunciadas pode ser dada por $3! + 1 \times 3! \times 2 + 3 \times 2 \times 2$, ou seja, 30.

8.

De $P(\bar{A}) = 3P(B)$ e do facto de $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, vem que $P(A) = 1 - 3P(B)$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 1 + 3P(B) - P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = 4P(A \cap B).$$

Como $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e porque $P(B) = 4P(A \cap B)$, vem que:

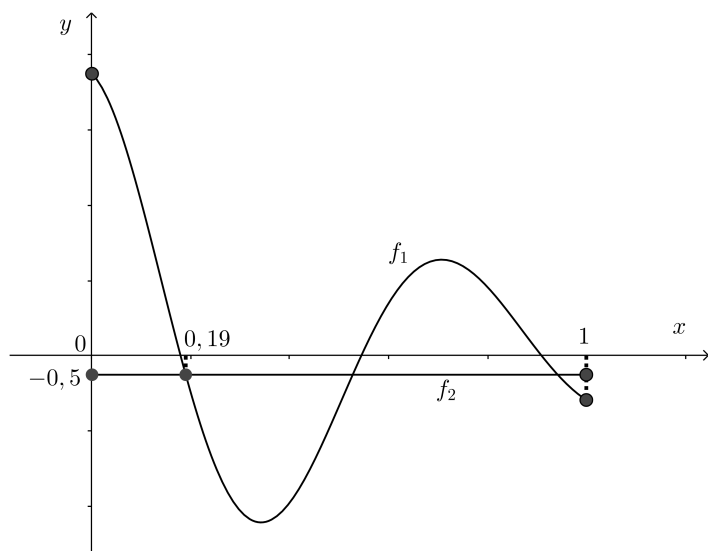
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{4P(A \cap B)} = \frac{1}{4}$$

9.

A equação que permite resolver o problema é $y(t) = -0,5$ (ou uma equivalente).

Assim, considerando $f_1: y(t) = 7,5 e^{-1,5t} \text{sen}(8,6t + 1,6)$ e $f_2: y = -0,5$, determinamos o ponto de interseção dos gráficos das duas funções com o auxílio da calculadora gráfica.

Como $t \in [0,1]$ obtemos a seguinte representação gráfica:



Logo o valor de t , solução deste problema, em segundos e arredondado às centésimas é 0,19 s.

10.

(I) “O gráfico da função f pode ter a concavidade voltada para baixo em \mathbb{R}^+ ”.

A proposição é falsa pois, a afirmação “ a função f' , derivada da função f , é estritamente crescente no intervalo $]0, +\infty[$ ”, é equivalente a “ $f''(x) \geq 0, \forall x \in]0, +\infty[$ ”, ou seja, o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima em \mathbb{R}^+ .

(II) “No intervalo $]1, 5[$, a função f tem, pelo menos, um extremo”.

A proposição é falsa pois, pelo facto de a função f ser diferenciável e f' ser crescente e $f'(1) = 2$, podemos concluir que f' não tem zeros em $]1, 5[$, logo a função f não tem extremos nesse intervalo.

11.

11.1.

A reta s é paralela à reta r , logo as retas r e s têm o mesmo declive ($m_s = m_r$).

E como $m_r = g'(0) = \cos 0 + 2\text{sen} 0 = 1$, pois a reta r é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0, concluímos que:

$$s: y = x + b$$

Além disso, sabemos que a reta s intersecta Ox no ponto de abcissa 4,

logo temos que $0 = 4 + b \Leftrightarrow b = -4$

Concluimos, assim, que a equação da reta s é $y = x - 4$

11.2.

Para estudar a função g quanto ao sentido das concavidades e ponto de inflexão do seu gráfico, determinemos a expressão analítica da segunda derivada de g :

$$g''(x) = -2\operatorname{sen}(2x) + 2\operatorname{cos}x = -2(2\operatorname{sen}x\operatorname{cos}x) + 2\operatorname{cos}x = 2\operatorname{cos}x(-2\operatorname{sen}x + 1)$$

Determinemos agora os zeros da segunda derivada da função

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{cos}x(-2\operatorname{sen}x + 1) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{cos}x = 0 \vee \operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \text{ logo tem-se } g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Elaborando um quadro de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g , vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$2\operatorname{cos}x$	n.d.	+	+	+	n.d.
$-2\operatorname{sen}x + 1$	n.d.	+	0	-	n.d.
$g''(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
gráfico de g	n.d.	\cup	P.I.	\cap	n.d.

Logo, o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \right]$, concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$ e tem ponto de inflexão em $x = \frac{\pi}{6}$.

12.

$$z = -2i = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

O número complexo que tem como afixo o transformado do ponto A , afixo do número complexo z , por uma rotação de centro na origem e de ângulo orientado de amplitude $\frac{\pi}{3}$ obtém-se através do produto:

$$\left(2e^{-\frac{\pi}{2}i}\right)\left(1e^{\frac{\pi}{3}i}\right) = (2 \times 1)e^{-\frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{3}i} = 2e^{-\frac{\pi}{6}i} = 2\operatorname{cos}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2}i = \sqrt{3} - i$$

Resposta correta: (A)

13.

$$w = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}} = \frac{2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}} = \left(\frac{2}{1}\right) e^{i\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{25\pi}{12}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

C.A. $-1 - \sqrt{3}i = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$ pois :

$$|-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\theta = \arg(-1 - \sqrt{3}i) : \operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \quad \wedge \quad \theta \in 3^{\text{a}}Q, \text{ logo } \theta = \frac{4\pi}{3}$$

Como w é uma das raízes sextas de z , então:

$$z = w^6 \Leftrightarrow z = \left(2e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}\right)^6 \Leftrightarrow z = 2^6 e^{i\left(\frac{6\pi}{12}\right)} \Leftrightarrow z = 64e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow z = 64i$$

Donde, $iz = (64i)i = -64$

14.

Por definição $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

E conseqüentemente, $f'(-a) = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x) - f(-a)}{x + a}$

Como por hipótese, f é par, temos que $f(a) = f(-a)$.

Assim,

$$\begin{aligned} f'(-a) &= \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x) - f(-a)}{x + a} = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x) - f(a)}{x + a} \stackrel{1}{=} \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(-y) - f(a)}{-y + a} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(-y) - f(a)}{-(y - a)} = \\ &= - \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(-y) - f(a)}{y - a} \stackrel{2}{=} - \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = -f'(a) \end{aligned}$$

1_ Mudança de Variável $y = -x; \quad x \rightarrow -a; y \rightarrow a$

2_ A função f é par

Isto é, $f'(-a) = -f'(a)$ e, como por hipótese, $f(a) = f(-a)$, podemos concluir que:

$$f'(-a) = -f'(a)$$

Assim,

$$f'(-a) \times f'(a) = -f'(a) \times f'(a) = -[f'(a)]^2_{C.Q.D.}$$

FIM