Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 23 DE JUNHO 2026

1.

Para ler os cinco livros policiais seguidos existem 5 posições para o fazer. O João ou lê os cinco livros seguidos logo ao princípio, ou lê os cinco livros no fim dos restantes ou poderá ler nos três intervalos que existem entre os outros quatro livros.

Para além das cinco posições, o João poderá ler os quatro livros policiais por qualquer ordem, o que dará 4! maneiras diferentes e poderá também ler os outros quatro livros de 4! maneiras diferentes.

Assim, a resposta correta é $5 \times 4! \times 4!$

Resposta correta: (D)

2.

2.1.

A função f é contínua em $x=3$ se e só se $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3)$.

Calculemos cada um dos limites laterais, sendo que o limite lateral à esquerda de 3 é a imagem da função em $x=3$.

Ora, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3) = 4 - e^{3-3}(3+1) - \frac{1}{2} \times 3^2 = -\frac{9}{2}$.

Por sua vez,

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{e^{x-3}-1}{x^2-9} = \lim_{x \to 3^+} \left(\frac{e^{x-3}-1}{x-3} \times \frac{1}{x+3} \right) = \lim_{x \to 3^+} \frac{e^{x-3}-1}{x-3} \times \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x+3} = 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Como $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, concluímos que a função não é contínua em $x=3$.

2.2.

A função f em $]-\infty, 3[$ é definida pela expressão $f(x) = 4 - e^{3-x}(x+1) - \frac{1}{2}x^2$.

Para estudarmos a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos $]-\infty, 3[$, determinemos a expressão analítica da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = 0 - (-1) \times e^{3-x}(x+1) - e^{3-x} \times 1 - \frac{1}{2} \times 2x = e^{3-x}(x+1) - e^{3-x} - x =$$
$$= e^{3-x}(x+1-1) - x = e^{3-x} \times x - x = x\left(e^{3-x} - 1\right)$$

Procuremos os zeros da derivada:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\left(e^{3-x}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee e^{3-x}-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee e^{3-x}=1 \Leftrightarrow x=0 \vee 3-x=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=3$

Como $x \in \left]-\infty,3\right[$, então $x=0$.

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

	−□	0		3
x	$-$	0	$+$	
$e^{3-x}-1$	$+$	$+$	$+$	
Sinal de $f'(x)$	$-$	0	$+$	
Variação de f	↘	$f(0)$	↗	

Concluímos, pela análise da tabela que, a função f é monótona decrescente em $\left]-\infty,0\right]$, monótona crescente em $\left[0,3\right[$ e que a abcissa do extremo relativo da função é 0.

2.3.

A função f, em $\left]-1,0\right[$, é definida pela expressão $f(x)=4-e^{3-x}(x+1)-\frac{1}{2}x^2$.

Se o ponto do gráfico da função f tem ordenada simétrica da abcissa, temos que:

$$f(x)=-x$$

Ora, $f(x)=-x \Leftrightarrow 4-e^{3-x}(x+1)-\frac{1}{2}x^2=-x \Leftrightarrow 4-e^{3-x}(x+1)-\frac{1}{2}x^2+x=0$

Consideremos a função g, de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x)=4-e^{3-x}(x+1)-\frac{1}{2}x^2+x$$

1) g é contínua em $[-1,0]\subset\mathbb{R}$, pois resulta de operações elementares entre funções contínuas.

2) Calculando:

$$g(-1)=4-e^{3+1}(-1+1)-\frac{1}{2}(-1)^2+(-1)=4-\frac{1}{2}-1=\frac{5}{2}$$

$$g(0)=4-e^{3-0}(0+1)-\frac{1}{2}\times 0^2+0=4-e^3$$

3) Por 2), temos que $g(0)<0<g(-1)$.

4) Por 1) e 3), aplicando o teorema de Bolzano-Cauchy, resulta que existe pelo menos um valor em $\left]-1,0\right[$, tal que a sua imagem por meio de g é 0, isto é, existe pelo menos um ponto do gráfico da função f de abcissa pertencente ao intervalo $\left]-1,0\right[$ que tem ordenada simétrica da abcissa.

3.

Determinamos a média da TMB das sete mulheres pedida, usando a calculadora gráfica, obtendo o seguinte valor arredondado às unidades: $\bar{y}=1374$. Assim, a resposta correta para **(a)** é a **(2)**.

Determinando o primeiro quartil e o terceiro quartil de IMC, usando a calculadora gráfica, obtemos para o primeiro quartil 23,4 e para o terceiro quartil 27,5. Observando os valores do IMC na tabela contamos três mulheres com o IMC dentro do intervalo pedido. Assim, a resposta correta para **(b)** é a **(1)**.

Usando a calculadora gráfica determinámos o coeficiente de correlação linear e obtivemos o seguinte valor aproximado: $r = 0,88104$. O coeficiente de correlação linear entre as variáveis apresentadas na figura 1 é negativo, pelo que o coeficiente que determinámos, sendo positivo é superior a esse. Assim, a resposta correta para **(c)** é a **(3)**.

Usando o modelo de regressão linear apresentado, podemos prever um valor aproximado da TMB de uma mulher de 43 anos. Modelo apresentado:

$$y = -9,02x + 1777,62$$

Para $x = 43$, temos:

$$y \approx -9,02 \times 43 + 1777,62 \approx 1390$$

Assim, a resposta correta para **(d)** é a **(3)**.

4.

4.1.

Seja α o plano perpendicular à reta DH e que passa em G.

Assim, podemos considerar como vetor normal do plano α o vetor diretor da reta DH, logo $\vec{n}(1,3,0)$.

O plano α será da forma $x + 3y + d = 0$, uma vez que o ponto G pertence ao plano obtém-se $6 + 3 \times 9 + d = 0 \Leftrightarrow d = -33$.

Temos, portanto, que o plano pedido é $x + 3y - 33 = 0$

Resposta correta: (B)

4.2.

Comecemos por calcular as coordenadas do ponto A que são do tipo $(x,0,0)$, $x \in \mathbb{R}$.

Sabemos que os pontos A, B e G têm cota nula, logo a base $[AFGB]$ está contida no plano xOy, assim, os pontos A D têm a mesma abcissa, os pontos B e C têm a mesma ordenada ($y = 6$) e os pontos C e D têm a mesma cota ($z = 4$).

O ponto D é da forma $(x,0,4), x \in \mathbb{R}$ e como D pertence à reta DH, sabemos que as coordenadas de D são do tipo $(2+k,-3+3k,4), k \in \mathbb{R}$, tem-se que: $(x,0,4) = (2+k,-3+3k,4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+k \\ 0 = -3+3k \\ 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ k = 1 \end{cases}$

Conclui-se que $D(3,0,4)$, pelo que $A(3,0,0)$ e $B(0,6,0)$.

Sabemos, ainda, que $G(6,9,0)$.

Um dos raios da superfície esférica é a aresta $[AF]$ que tem o mesmo comprimento da aresta $[BG]$, logo

$$raio = \overline{BG} = \sqrt{(0-6)^2 + (9-6)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{45}$$

Assim, a superfície esférica pedida tem de equação: $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 45$.

5. (AE 2018)

Analisando as sucessões apresentadas tendo em conta o estudo realizado com sucessões, temos:

(A) $u_n = n^2 - 4n$ Esta sucessão não é monótona.

(B) $v_n = 2n + 3$ Esta sucessão é monótona crescente.

(C) $t_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ Esta sucessão é monótona crescente.

(D) $w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ Esta sucessão é monótona decrescente.

Resposta correta: (D)

5. (AE 2023)

Analisando as sucessões apresentadas tendo em conta o estudo realizado com sucessões, temos:

(A) $u_n = n^2 - 4n$ Esta sucessão não é uma progressão geométrica.

(B) $v_n = 2n + 3$ Esta sucessão não é uma progressão geométrica.

(C) $t_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ Esta sucessão é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$. A soma de todos os seus termos não tem um valor finito.

(D) $w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ Esta sucessão é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$. A soma de todos os seus termos tem um valor finito.

Resposta correta: (D)

6.

Casos possíveis:

Dos 10 compartimentos disponíveis, escolhemos 5 para colocar os pares de sapatos, onde a ordem (a cor do sapato de cada compartimento) interessa.

${}^{10}A_5 = 30240$ ou $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$

Casos favoráveis:

Duas situações distintas podem ocorrer para que os pares de sapatos brancos (B) e pretos (P) fiquem em compartimentos adjacentes;

- Dois pares, preto(P) e branco(B), na mesma linha:

Existem 5 linhas diferentes. Em cada uma delas, os dois pares podem permutar entre si de 2! maneiras (BP ou PB). Para cada uma destas possibilidades, restam 8 compartimentos livres para distribuir os restantes 3 pares de sapatos, o que se faz de ${}^{8}A_3$ maneiras diferentes.

Ou seja, temos $5 \times 2! \times {}^{8}A_3 = 3360$.

- Dois pares, preto(P) e branco(B), na mesma coluna:

Existem 2 colunas diferentes. Ema cada uma, há 4 compartimentos diferentes para colocar os dois pares (verticais e adjacentes). Por sua vez, para cada uma destas posições os pares podem permutar de 2! Maneiras. Para os restantes 3 pares, voltamos a ter ${}^{8}A_{3}$ maneiras de distribuir.

$2 \times 4 \times 2! \times {}^{8}A_{3} = 5376$

Temos $3360 + 5376 = 8736$ casos favoráveis.

A probabilidade de o par de sapatos brancos e o par de sapatos pretos ficarem em compartimentos adjacentes aplicando a Regra de Laplace, é $\frac{8736}{30240} = \frac{13}{45}$.

7.

Consideremos os acontecimentos:

S: "utilizar guarda-sol"

V: "utilizar guarda-vento"

Sabe-se que $P(S) = 0,75$, $P(\bar{S} \cap \bar{V}) = 0,22$ e $P(V|S) = \frac{1}{5} = 0,20$.

Pretende-se determinar $P(S|\bar{V})$.

Sabemos que:

$$P(V|S) = 0,20 \Leftrightarrow \frac{P(V \cap S)}{P(S)} = 0,20 \Leftrightarrow \frac{P(V \cap S)}{0,75} = 0,20 \Leftrightarrow P(V \cap S) = 0,75 \times 0,20 \Leftrightarrow P(V \cap S) = 0,15$$

Pela tabela de contingência temos a seguinte representação:

	S	$\bar{S}$	
V	0,15	0,03	0,18
$\bar{V}$	0,6	0,22	0,82
	0,75	0,25	1

$P(S|\bar{V}) = \frac{P(S \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} \Leftrightarrow P(S|\bar{V}) = \frac{0,6}{0,82} \Leftrightarrow P(S|\bar{V}) = \frac{30}{41}$. Portanto, $P(S|\bar{V}) \approx 0,73$, ou seja, 73%

A probabilidade de a pessoa ter utilizado o guarda-sol, sabendo que não utilizou o para-vento é de aproximadamente 73%.

8.

Sabemos que as coordenadas dos pontos *A*, *C* e *D* são:

$A(1,0)$

$C(0,1)$

$D(\cos(\pi + \alpha), \operatorname{sen}(\pi + \alpha)) = (-\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha)$

Como a amplitude do ângulo α é igual à do ângulo $\measuredangle$OBC temos que:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{x_B}\Leftrightarrow x_B=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\Leftrightarrow x_B=\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}\Leftrightarrow x_B=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

sendo as coordenadas de B iguais a:

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},1\right)$$

Assim, a área do triângulo pedida é:

$$A(\alpha)=\frac{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\times(1-(-\operatorname{sen}\alpha)}{2}=\frac{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\times(1+\operatorname{sen}\alpha)}{2}=\frac{\cos\alpha\,(1+\operatorname{sen}\alpha)}{2\cos\alpha}$$

c.q.d.

9. (AE2018)

Vamos demonstrar a igualdade, partindo do primeiro membro:

$$1-\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\operatorname{sen}x\right)^2=1-(\cos x-\operatorname{sen}x)^2=$$
$$=1-\left(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen}x\cos x\right)$$
$$=1-\left(1-\operatorname{sen}(2x)\right)$$
$$=\operatorname{sen}(2x)$$

c.q.d.

9. (AE2023)

Como a função f é contínua em $]0,+\infty[$, também é contínua em $[1,2]$. Logo podemos aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy.

$f(1)=1^4\ln 1-1=-1$

$f(2)=2^4\ln 4-1\approx 10,090$

Logo, $f(1)<0<f(2)$

Ponto Médio: $\frac{1+2}{2}=1,5$; Erro máximo $2-1,5=0,5$

$f(1,5)=(1,5)^4\ln(1,5)-1\approx 1,053$

Logo, $f(1)<0<f(1,5)$

Ponto Médio: $\frac{1+1,5}{2}=1,25$; Erro máximo: $1,5-1,25=0,25$

$f(1,25)=(1,25)^4\ln(1,25)-1\approx -0,455$

Logo, $f(1,25)<0<f(1,5)$

Ponto Médio: $\frac{1,25+1,5}{2}=1,375$; Erro máximo: $1,5-1,375=0,125$

$f(1,375)=(1,375)^4 \ln(1,375)-1 \approx 0,138$

Logo, $f(1,25)<0<f(1,375)$

Ponto Médio: $\frac{1,25+1,375}{2}=1,3125$; Erro máximo: $1,375-1,3125=0,0625$

O valor do zero da função f pode ser $1,3125$, pois o erro já é inferior a $0,1$ como pedido no enunciado.

10.

Tem-se que : $z=e^{i\theta}, \theta \in \left]0,\frac{\pi}{6}\right[$, logo $z^2=e^{i(2\theta)}, 2\theta \in \left]0,\frac{\pi}{3}\right[$.

Como o $\left|e^{i(2\theta)}\right|=\left|e^{i\theta}\right|=1$ e $\arg(z^2)=2.\arg(z)$, a resposta correta é o ponto C, pois é o único ponto que está à mesma distância da origem do referencial que o ponto P e o seu argumento é o dobro do argumento do ponto P.

Resposta correta: (C)

11.

Como $w=\frac{-\sqrt{3}+i^{37}}{2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}}$, em que:

$i^{37}=i^{4\times 9+1}=i$

e

$-\sqrt{3}+i=2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$, pois $\left|-\sqrt{3}+i\right|=2$ e $tg\ \theta=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e como $\theta \in 2.^{\text{o}}$ quadrante ,

então $\theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

Assim sendo, $w=\frac{-\sqrt{3}+i^{37}}{2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}}=\frac{2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}{2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}}=e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$

Tem-se que: $z^2=w \Leftrightarrow z^2=e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow z=e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1\}$

Obtemos assim duas soluções:

Para $k=0, z_0=e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}=cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i.sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Para $k=1, z_1=e^{i\left(\frac{11\pi}{6}\right)}=cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i.sen\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

Como tal as soluções são: $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

12.

Atendendo a que a Inês pretende efetuar depósitos de 500€ todos os anos durante 25 anos, deposita no total 12 500€ (500×25).

Como a Inês pretende obter, no final dos 25 anos, um acréscimo de 20% relativamente ao total das quantias depositadas, a quantia a obter será de 15 000€ $(12\,500 \times 1{,}2)$.

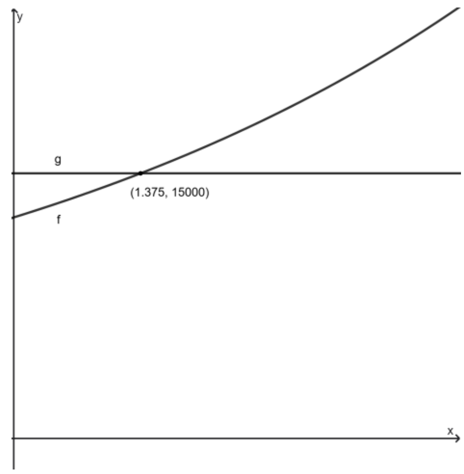
Uma equação que permite resolver o problema é dada por:

$$500\left(1+\frac{100}{j}\right)\left(\left(1+\frac{j}{100}\right)^{25}-1\right)=15\,000$$

Introduzindo na calculadora gráfica as funções f e g, definidas, respetivamente, por:

$$f(x)=500\left(1+\frac{100}{x}\right)\left(\left(1+\frac{x}{100}\right)^{25}-1\right) \quad \text{e} \quad g(x)=15000$$

e considerando a janela de visualização, por exemplo, $[0,5]\times[0,30000]$, obtemos:



O ponto resultante da interseção das duas funções tem de coordenadas $(1{,}375;15000)$, com aproximação às milésimas. Logo, a taxa de juro anual, em percentagem, que a Inês deverá negociar com o banco, de modo a concretizar o seu objetivo deverá ser de 1,375%.

13. (AE2018)

A soma dos quatro últimos elementos de uma certa linha n do triângulo de Pascal é igual à soma dos quatro primeiros elementos dessa linha, pelo que ${}^nC_0+{}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3=288\,101$.

O quarto elemento da linha seguinte, isto é, da linha $n+1$, é ${}^{n+1}C_3=287980$. Como ${}^{n+1}C_3={}^nC_2+{}^nC_3$, tem-se que ${}^nC_2+{}^nC_3=287980$.

Pretende-se determinar o segundo elemento da linha n, isto é, ${}^nC_1$. Assim,

$$\underbrace{{}^nC_0}_{1}+{}^nC_1+\underbrace{{}^nC_2+{}^nC_3}_{287\,980}=288\,101 \Leftrightarrow {}^nC_1=288\,101-287\,980-1 \Leftrightarrow {}^nC_1=288\,101-287\,980-1=120$$

13. (AE2023)

Sem as votações dos restantes 50 clientes, isto é, considerando apenas os votos da tabela 2, o número de pontos de cada praia é:

Almograve (A): $3\times 82+3\times 24+4\times 51+3\times 43=651$;

Barril (B): $4\times 82+1\times 24+2\times 51+1\times 43=497$;

Cabedelo (C): $2\times 82+4\times 24+1\times 51+2\times 43=397$;

Duquesa (D): $1\times 82+2\times 24+3\times 51+4\times 43=455$.

Assim, mesmo que a praia do Barril fosse a primeira preferência dos restantes 50 clientes e a praia do Almograve fosse a quarta preferência desses clientes, o total de pontos da praia do Barril seria $497+4\times 50=697$ e o total de pontos da praia de Almograve seria $651+1\times 50=701$, ou seja, o número de pontos da praia de Almograve será sempre superior à da praia do Barril, pelo que a praia do Barril (B) não pode ser a escolhida.

14.

Afirmação I.

Sabe-se que -1, 0 e 3 são os zeros de f' e que $f'(x)<0 \Leftrightarrow -1<x<0$. Assim, pode-se elaborar um quadro de sinal de f' e relacioná-lo com a monotonia de f :

x	$-\infty$	-1		0		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
f		Máx.		Mín.			

Logo, a função f tem apenas dois extremos, um máximo relativo em $x=-1$ e um mínimo relativo em $x=0$, pelo que a afirmação **I.** é falsa.

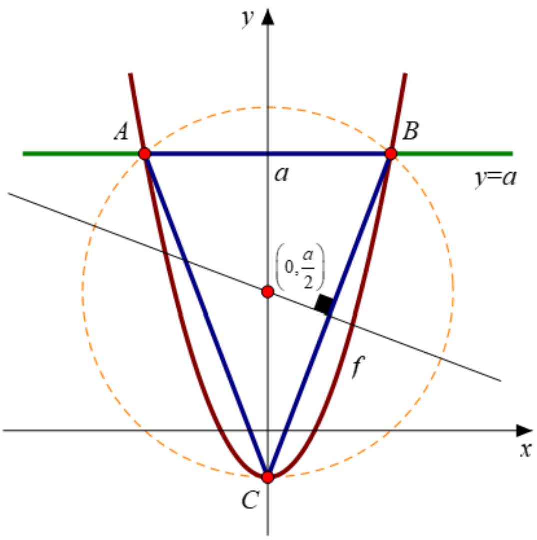
Afirmação II.

Como f' é monótona em $[3,+\infty[$, neste caso, monótona crescente (e derivável), tem-se que $f''(x)>0$ em $]3,+\infty[$, pelo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]3,+\infty[$. Logo, a afirmação **II.** é falsa.

15.

Tem-se que $f(x)=x^2-1=(x-0)^2-1$, pelo que as coordenadas do vértice da parábola que representa o gráfico de f são $(0,-1)$. Designemos este ponto por C

Determinando as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y=a$, tem-se $f(x)=a \Leftrightarrow x^2-1=a \Leftrightarrow x^2=a+1 \underset{a>-1 \Rightarrow a+1>0}{\Leftrightarrow} x=-\sqrt{a+1} \vee x=\sqrt{a+1}$, pelo que as coordenadas dos pontos de interseção são $\left(-\sqrt{a+1},a\right)$ e $\left(\sqrt{a+1},a\right)$. Designemos estes pontos por A e B, respetivamente.



O centro da circunferência que contém os pontos referidos é o circuncentro do triângulo $[ABC]$, que é interseção das mediatrizes dos segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$.

Dado que A e B são simétricos em relação ao eixo Oy, a mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é o eixo Oy, que tem equação $x=0$.

Assim, a abcissa do centro da circunferência é 0.

A equação da mediatriz do segmento de reta $[BC]$ é dada por:

$$(x-0)^2+(y+1)^2=\left(x-\sqrt{a+1}\right)^2+(y-a)^2$$

Substituindo x por zero na equação da mediatriz de $[BC]$, vem:

$$(0-0)^2+(y+1)^2=\left(0-\sqrt{a+1}\right)^2+(y-a)^2 \Leftrightarrow y^2+2y+1=a+1+y^2-2ay+a^2 \Leftrightarrow 2ay+2y=a^2+a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(2a+2)=a(a+1) \Leftrightarrow y=\frac{a(a+1)}{2(a+1)} \Leftrightarrow y=\frac{a}{2}$$

Logo, as coordenadas do centro da circunferência são $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ e o seu raio é $\left|\frac{a}{2}-(-1)\right|=\frac{a}{2}+1$.

FIM