

## TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

### 12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

(Dec.-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto, para alunos que se matricularam no 10.º Ano em 2003-2004)

Duração da Prova: **90 minutos**

7/Dezembro/2005

### PROBABILIDADES E COMBINATÓRIA

## VERSÃO 1

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.**

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui três itens de resposta aberta, subdivididos em alíneas, num total de sete.

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

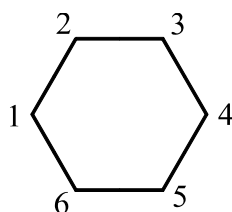
- 1.** Três raparigas e os respectivos namorados posam para uma fotografia.  
De quantas maneiras se podem dispor, lado a lado, de modo que cada par de namorados fique junto na fotografia?
- (A) 12                      (B) 24                      (C) 36                      (D) 48
- 2.** Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em 4 naipes (*Espadas, Copas, Ouros e Paus*). Em cada naipe há um *Ás*, três figuras (*Rei, Dama e Valete*) e mais nove cartas (do *Dois* ao *Dez*).
- A Joana pretende fazer uma sequência com **seis** cartas do naipe de *Espadas*. Ela quer iniciar a sequência com o *Ás*, quer que as três cartas seguintes sejam figuras e quer concluir a sequência com duas das nove restantes cartas desse naipe.
- Quantas sequências diferentes pode a Joana fazer?
- (A) 416                      (B) 432                      (C) 528                      (D) 562
- 3.** De uma certa linha do Triângulo de Pascal, sabe-se que a soma dos dois primeiros termos é 21.
- Qual é o maior termo dessa linha?
- (A) 169 247                      (B) 175 324                      (C) 184 756                      (D) 193 628

4. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^2 - 9$ .  
No gráfico desta função, considere os pontos cujas abcissas são  $-4$ ,  $-2$ ,  $0$ ,  $2$  e  $4$ .  
Escolhem-se, ao acaso, dois desses cinco pontos e desenha-se o segmento de recta que tem por extremidades esses dois pontos.

Qual é a probabilidade de esse segmento intersectar o eixo das abcissas?

- (A) 0,4                      (B) 0,5                      (C) 0,6                      (D) 0,7

5. Na figura está representado um hexágono regular com os vértices numerados de 1 a 6.



Lança-se três vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.  
Em cada lançamento, selecciona-se o vértice do hexágono que corresponde ao número saído nesse lançamento.

Note que, no final da experiência, podemos ter um, dois ou três pontos seleccionados (por exemplo: se sair o mesmo número três vezes, só é seleccionado um ponto).

Qual é a probabilidade de se seleccionarem três pontos que sejam os vértices de um triângulo equilátero?

- (A)  $\frac{1}{18}$                       (B)  $\frac{1}{16}$                       (C)  $\frac{1}{14}$                       (D)  $\frac{1}{12}$

6. O João vai lançar seis mil vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e vai adicionar os números saídos.

De qual dos seguintes valores é de esperar que a soma obtida pelo João esteja mais próxima?

- (A) 20 000                      (B) 21 000                      (C) 22 000                      (D) 23 000

7. Admita que a variável *peso*, em quilogramas, das raparigas de 15 anos, de uma certa escola, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 40.

Sabe-se ainda que, nessa escola, 20% das raparigas de 15 anos pesam mais de 45 Kg.

Escolhida, ao acaso, uma rapariga de 15 anos dessa escola, qual é a probabilidade de o seu peso estar compreendido entre 35 Kg e 40 Kg ?

- (A) 0,2                      (B) 0,25                      (C) 0,3                      (D) 0,35

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja  $C$  o conjunto de todos os números naturais com três algarismos (ou seja, de todos os números naturais de 100 a 999).

1.1. Quantos elementos do conjunto  $C$  são múltiplos de 5?

1.2. Quantos elementos do conjunto  $C$  têm os algarismos todos diferentes?

2.

2.1. Seja  $\Omega$  o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ ), com  $P(A) > 0$ .

Sejam  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  os acontecimentos contrários de  $A$  e de  $B$ , respectivamente.

Seja  $P(B|A)$  a probabilidade de  $B$ , se  $A$ .

Mostre que: 
$$\frac{P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(A)} = 1 - P(B|A)$$

2.2. Próximo de uma praia portuguesa, realiza-se um acampamento internacional de juventude, no qual participam jovens de ambos os sexos.

Sabe-se que:

- a quarta parte dos jovens são portugueses, sendo os restantes estrangeiros;
- 52% dos jovens participantes no acampamento são do sexo feminino;
- considerando apenas os participantes portugueses, 3 em cada 5 são rapazes.

No último dia, a organização vai sortear um prémio, entre todos os jovens participantes no acampamento.

Qual é a probabilidade de o prémio sair a uma rapariga estrangeira? Apresente o resultado na forma de percentagem.

**Nota:** se o desejar, pode utilizar a igualdade da alínea anterior (nesse caso, comece por identificar claramente, no contexto do problema, os acontecimentos  $A$  e  $B$ ); no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo (como, por exemplo, através de uma tabela de dupla entrada ou de um diagrama em árvore).

**3.** Uma caixa, que designamos por caixa 1, contém duas bolas pretas e três bolas verdes. Uma segunda caixa, que designamos por caixa 2, contém duas bolas pretas e uma bola verde.

**3.1.** Considere a seguinte experiência: retirar, ao acaso, uma bola de cada caixa. Seja  $X$  a variável aleatória «*número de bolas verdes que existem no conjunto das duas bolas retiradas*».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória  $X$ , apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.

**3.2.** Considere agora que, tendo as duas caixas a sua constituição inicial, se realiza a seguinte experiência:

- ao acaso, retiram-se simultaneamente três bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2;
- em seguida, novamente ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2.

Sejam os acontecimentos:

$A$ : «as três bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor»;

$B$ : «as duas bolas retiradas da caixa 2 são de cores diferentes».

**Sem utilizar** a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de  $P(B|A)$ , apresentando o seu valor na forma de fracção irredutível. Numa pequena composição, explique o raciocínio que efectuou. O valor pedido deverá resultar da interpretação do significado de  $P(B|A)$ , no contexto do problema, significado esse que deverá começar por explicar.

**3.3.** Considere agora que, na caixa 2, tomando como ponto de partida a sua constituição inicial, se colocam mais  $n$  bolas, todas amarelas. Esta caixa fica, assim, com duas bolas pretas, uma bola verde e  $n$  bolas amarelas.

Considere a seguinte experiência: ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas dessa caixa.

Sabendo que a probabilidade de uma delas ser amarela e a outra ser verde é  $\frac{5}{39}$ , determine o valor de  $n$ .

## COTAÇÕES

<b>Grupo I</b> .....	<b>63</b>
Cada resposta certa .....	9
Cada resposta errada.....	0
Cada questão não respondida ou anulada .....	0
<b>Grupo II</b> .....	<b>137</b>
<b>1.</b> .....	<b>36</b>
<b>1.1.</b> .....	<b>18</b>
<b>1.2.</b> .....	<b>18</b>
<b>2.</b> .....	<b>38</b>
<b>2.1.</b> .....	<b>20</b>
<b>2.2.</b> .....	<b>18</b>
<b>3.</b> .....	<b>63</b>
<b>3.1.</b> .....	<b>20</b>
<b>3.2.</b> .....	<b>20</b>
<b>3.3.</b> .....	<b>23</b>
<b>TOTAL</b> .....	<b>200</b>