

## TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

### 12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

(Dec.-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto, para alunos que se matricularam no 10.º Ano em 2003-2004)

Duração da Prova: **90 minutos**

17/Março/2006

## VERSÃO 1

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.**

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui quatro itens de resposta aberta, alguns subdivididos em alíneas, num total de seis.

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Seja  $(x_n)$  a sucessão de termo geral  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$   
Seja  $(y_n)$  a sucessão de termo geral  $y_n = 1 + \ln(x_n)$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ )  
Qual é o valor de  $\lim y_n$  ?
- (A) 2                      (B) 3                      (C)  $1 + e$                       (D)  $2 + e$

2. Indique o número real que é solução da equação  $e^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- (A)  $\frac{1}{2}$                       (B)  $\frac{3}{2}$                       (C)  $\frac{5}{2}$                       (D)  $\frac{7}{2}$

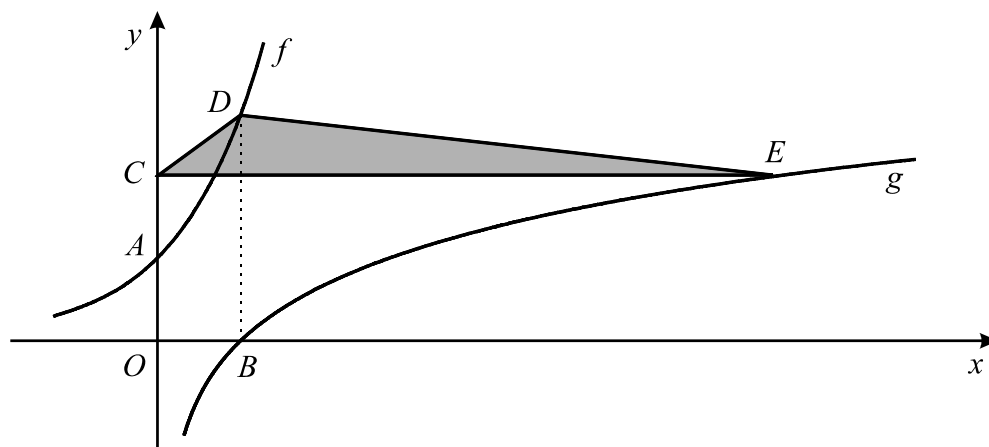
3. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_3(1 - x) \leq 1$$

- (A)  $[-2, 1[$                       (B)  $[-1, 2[$   
(C)  $] - \infty, -2]$                       (D)  $[-2, +\infty[$

4. Na figura abaixo estão representadas, em referencial o. n.  $xOy$ :
- parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x$
  - parte do gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $g(x) = \ln x$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ )

O ponto  $A$  é o ponto de intersecção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Oy$  e o ponto  $B$  é o ponto de intersecção do gráfico de  $g$  com o eixo  $Ox$ .



Na figura está também representado um triângulo  $[CDE]$ .

O ponto  $C$  pertence ao eixo  $Oy$ , o ponto  $D$  pertence ao gráfico de  $f$  e o ponto  $E$  pertence ao gráfico de  $g$ .

Sabe-se ainda que:

- a recta  $BD$  é paralela ao eixo  $Oy$  e a recta  $CE$  é paralela ao eixo  $Ox$
- $\overline{AC} = \overline{OA}$

Qual é a área do triângulo  $[CDE]$ ?

- (A)  $\frac{(e-1) \ln 2}{2}$                       (B)  $\frac{(e^2-1) \ln 2}{2}$
- (C)  $\frac{e(e-2)}{2}$                          (D)  $\frac{e^2(e-2)}{2}$

5. Todos os alunos de uma turma de uma escola secundária praticam pelo menos um dos dois desportos seguintes: andebol e basquetebol.

Sabe-se que:

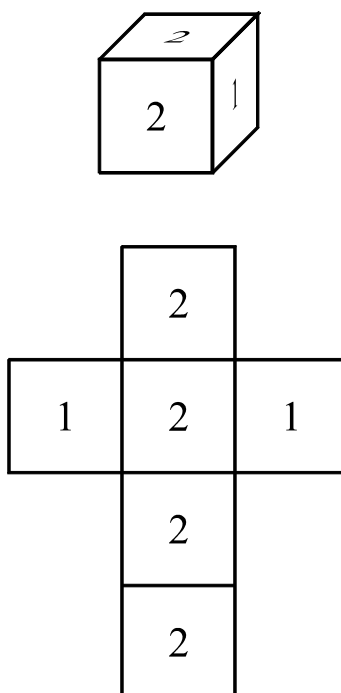
- metade dos alunos da turma pratica andebol
- 70% dos alunos da turma pratica basquetebol

Escolhe-se ao acaso um aluno dessa turma e constata-se que ele é praticante de andebol.

Qual é a probabilidade de ele praticar basquetebol?

- (A) 0,1                      (B) 0,2                      (C) 0,3                      (D) 0,4

6. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação.



Lança-se este dado duas vezes.

Seja  $X$  a variável aleatória: soma dos números saídos nos dois lançamentos.

Indique o valor de  $k$  tal que  $P(X = k) = \frac{1}{9}$

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4
7. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , um octaedro regular em que cada um dos seus vértices pertence a um dos eixos coordenados (dois vértices em cada eixo).
- Escolhendo, ao acaso, três vértices desse octaedro, qual é a probabilidade de eles definirem um plano perpendicular ao eixo  $Oy$ ?
- (A)  $\frac{1}{3}$                       (B)  $\frac{2}{3}$                       (C)  $\frac{1}{5}$                       (D)  $\frac{2}{5}$

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público, de acordo com a função

$$V(x) = e^{14-x} \quad (x > 0)$$

sendo  $x$  o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e  $V(x)$  a quantidade vendida num mês (medida em litros).

- 1.1. A empresa tem um conjunto de despesas (compra ao produtor, empacotamento, publicidade, transportes, etc.) com a compra e a venda do azeite. Sabendo que cada litro de azeite vendido acarreta à empresa uma despesa total de 3 euros, **justifique** que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite, é dado por

$$L(x) = (x - 3) e^{14-x}$$

- 1.2. Utilize a calculadora para resolver **graficamente** o seguinte problema:  
*Entre que valores deve variar o preço de venda ao público de um litro de azeite para que o lucro mensal seja superior a dezasseis mil e quinhentos euros? Apresente os valores em euros, arredondados aos cêntimos (de euro).*  
Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

2. Considere a função  $f$ , de domínio  $]0, +\infty[$ , definida por  $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ ).

**Sem recorrer à calculadora**, resolva as duas alíneas seguintes.

2.1. Mostre que  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(4e^2\right)$

- 2.2. Estude a função  $f$  quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

3. Com o objectivo de estudar as leis do aquecimento e do arrefecimento, realizou-se, num laboratório de Física, a seguinte experiência: aqueceu-se ao lume uma certa quantidade de água, durante cinco minutos; passado este tempo, apagou-se o lume e deixou-se a água a arrefecer. A temperatura da água foi sendo medida, ao longo do decorrer da experiência.

Admita que:

- neste laboratório, a temperatura ambiente é constante;
- a temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida, era igual à temperatura ambiente;
- depois de se ter apagado o lume, a temperatura da água tende, com o passar do tempo, a igualar a temperatura ambiente.

Em resultado da experiência, concluiu-se que a relação entre a temperatura da água e o tempo  $t$ , contado em minutos, a partir do instante em que se colocou a água ao lume, é modelada por uma, e uma só, das quatro funções,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , definidas a seguir:

$$a(t) = \begin{cases} 24 - 2t & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 - 10e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} 12(t + 2) & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 + 70e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$c(t) = \begin{cases} 14(t + 1) & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 + 60e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$d(t) = \begin{cases} 12(t + 2) & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 + 60e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

Qual das quatro funções é a correcta?

Numa pequena composição, explique porque não pode ser nenhuma das outras três, indicando, para cada uma delas, uma razão pela qual a rejeita, explicando a sua inadequação, relativamente à situação descrita.

4. De uma função  $g$ , de domínio  $]0, +\infty[$ , sabe-se que:

- não tem zeros;
- a recta de equação  $y = x + 2$  é assíntota do seu gráfico.

Seja  $h$  a função, de domínio  $]0, +\infty[$ , definida por  $h(x) = \frac{x^2}{g(x)}$

Prove que a recta de equação  $y = x - 2$  é assíntota do gráfico de  $h$ .

**FIM**

## COTAÇÕES

<b>Grupo I</b> .....	<b>63</b>
Cada resposta certa .....	9
Cada resposta errada.....	0
Cada questão não respondida ou anulada .....	0
<b>Grupo II</b> .....	<b>137</b>
<b>1.</b> .....	<b>43</b>
<b>1.1.</b> .....	<b>20</b>
<b>1.2.</b> .....	<b>23</b>
<b>2.</b> .....	<b>46</b>
<b>2.1.</b> .....	<b>23</b>
<b>2.2.</b> .....	<b>23</b>
<b>3.</b> .....	<b>23</b>
<b>4.</b> .....	<b>25</b>
<b>TOTAL</b> .....	<b>200</b>