

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 17.01.2008

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste.
A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos
itens de escolha múltipla com zero pontos.

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada item, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que considera estar correcta.
- Se apresentar mais do que uma letra, a classificação será de zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

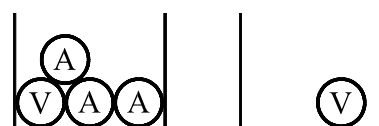
1. De um número real x sabe-se que $\log_5(x) = \pi - 1$

Indique o valor de $5x$

- (A) $25^{\pi-1}$ (B) $5^{\pi-1}$ (C) 5^π (D) $5(\pi - 1)^5$

2. Uma caixa 1 tem uma bola verde e três bolas amarelas.

Uma caixa 2 tem apenas uma bola verde.



Caixa 1

Caixa 2

Considere a experiência que consiste em tirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa 1, colocá-las na caixa 2 e, em seguida, tirar, também ao acaso, uma bola da caixa 2.

Sejam M e V os acontecimentos:

M : «as bolas retiradas da caixa 1 têm a mesma cor»

V : «a bola retirada da caixa 2 é verde»

Indique o valor da probabilidade condicionada $P(V | \bar{M})$

(Não necessita de recorrer à fórmula da probabilidade condicionada)

- (A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 1

3. Os códigos dos cofres fabricados por uma certa empresa consistem numa sequência de cinco algarismos como, por exemplo, 0 7 7 5 7

Um cliente vai comprar um cofre a esta empresa. Ele pede que o respectivo código satisfaça as seguintes condições:

- tenha exactamente três algarismos 5
- os restantes dois algarismos sejam diferentes
- a soma dos seus cinco algarismos seja igual a dezassete

Quantos códigos diferentes existem satisfazendo estas condições?

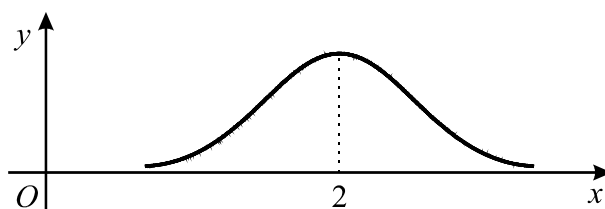
- (A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80

4. A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 31.

Qual é o quinto elemento da linha anterior?

- (A) 23 751 (B) 28 416 (C) 31 465 (D) 36 534

5. A Curva de Gauss representada na figura está associada a uma variável aleatória X , com distribuição Normal.



Tal como a figura sugere, a curva é simétrica relativamente à recta de equação $x = 2$

Para um certo valor de a , tem-se que $P(X > a) = 15\%$

Qual dos seguintes pode ser o valor de a ?

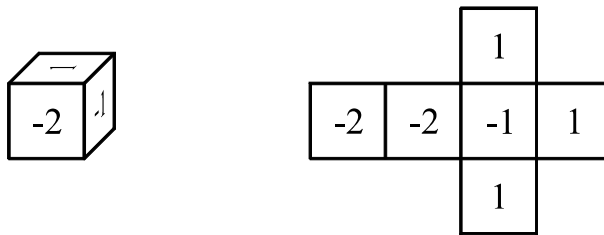
- (A) 1 (B) 1,5 (C) 2 (D) 2,5

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Na figura está representado um dado equilibrado e a respectiva planificação.



Lança-se este dado uma única vez.

Seja X o número escrito na face que fica voltada para cima.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X e, seguidamente, determine, **sem recorrer à calculadora**, o valor médio desta variável.

Apresente o valor médio na forma de fracção irredutível.

2. Doze amigos vão passear, deslocando-se num automóvel e numa carrinha, ambos alugados. O automóvel dispõe de cinco lugares: o do condutor e mais quatro. A carrinha dispõe de sete lugares: o do condutor e mais seis.

Apenas dois elementos do grupo, a Filipa e o Gonçalo, têm carta de condução, podendo qualquer um deles conduzir, quer o automóvel, quer a carrinha.

- 2.1. Os doze amigos têm de se separar em dois grupos, de modo a que um grupo viaje no automóvel e o outro na carrinha.
De quantas maneiras diferentes podem ficar constituídos os dois grupos de amigos?

- 2.2. Admita agora que os doze amigos já se encontram devidamente instalados nos dois veículos. O Gonçalo vai a conduzir a carrinha.

Numa operação STOP, a Brigada de Trânsito mandou parar cinco viaturas, entre as quais a carrinha conduzida pelo Gonçalo.

Se a Brigada de Trânsito escolher, ao acaso, dois dos cinco condutores para fazer o teste de alcoolémia, qual é a probabilidade de o Gonçalo ter de fazer o teste?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), ambos com probabilidade não nula. Utilizando a fórmula da probabilidade condicionada e as propriedades das operações com conjuntos, prove que

$$P\left(\left(\overline{A \cap B}\right) \mid B\right) = P(A|B)$$

4. Admita que uma certa população de seres vivos evolui de acordo com a seguinte lei: o número de indivíduos da população, t dias após um certo instante inicial, é dado aproximadamente por

$$P(t) = a e^{kt} \quad (t \in \mathbb{R}_0^+)$$

em que

- a é o número de indivíduos da população no instante inicial ($a > 0$)
- k é uma constante real

- 4.1. Seja r um número real positivo.

Considere que, ao fim de n dias, contados a partir do instante inicial, o número de indivíduos da população é igual a r vezes o número de indivíduos que existiam no referido instante inicial.

Mostre que se tem $k = \frac{\ln(r)}{n}$ (\ln designa logaritmo de base e)

- 4.2. Admita que, às zero horas do dia 1 do corrente mês, se iniciou, em laboratório, uma cultura de bactérias, em pequena escala, na qual se juntaram

- 500 indivíduos de uma estirpe A
- 500 indivíduos de uma estirpe B

Nunca foram introduzidos mais indivíduos destas duas estirpes nesta cultura.

As condições da cultura são desfavoráveis para a estirpe A , mas são favoráveis para a estirpe B . De facto,

- decorrido exactamente um dia, a estirpe A estava reduzida a 250 indivíduos
- decorridos exactamente seis dias, a estirpe B tinha alcançado 1000 indivíduos

- 4.2.1. Quer a estirpe A , quer a estirpe B , evoluíram de acordo com a lei acima referida. No entanto, o valor da constante k para a estirpe A é diferente do valor dessa constante para a estirpe B .

Utilizando a igualdade da alínea 4.1, verifique que:

- no caso da estirpe A , o valor da constante k , com quatro casas decimais, é $k_A = -0,6931$
- no caso da estirpe B , o valor da constante k , com quatro casas decimais, é $k_B = 0,1155$

- 4.2.2. Durante a primeira semana, houve um momento em que o **número total** de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, atingiu o valor mínimo. Utilizando os valores k_A e k_B referidos na alínea anterior e recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o **dia e a hora** em que tal aconteceu (hora arredondada às unidades).

Apresente, na sua resposta:

- a expressão da função que dá o número total de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, em função do tempo;
- o gráfico dessa função, para $t \in [0, 7]$, no qual deve estar devidamente assinalado o ponto necessário à resolução do problema;
- a coordenada relevante desse ponto, arredondada às milésimas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I 50 pontos

Cada resposta certa 10 pontos
Cada resposta errada..... 0 pontos
Cada item não respondido ou anulado 0 pontos

Grupo II 150 pontos

1. 21 pontos

2. 42 pontos

2.1. 21 pontos

2.2. 21 pontos

3. 25 pontos

4. 62 pontos

4.1. 20 pontos

4.2. 42 pontos

4.2.1. 20 pontos

4.2.2. 22 pontos

TOTAL 200 pontos