

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. $\log_a 3 + 2 \log_a 5 = \log_a (3 \times 5^2) = \log_a 75$

Resposta **C**

2.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} =$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

O gráfico de h tem uma assíntota horizontal de equação $y = 3$

Resposta **D**

3. Na opção A, tem-se: $g(-2) = -2 + f(-2) = -2 + 1 = -1$
 $g(2) = 2 + f(2) = 2 + 3 = 5$

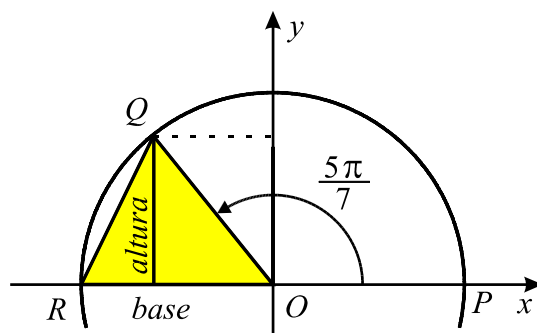
Como $g(-2)$ e $g(2)$ têm sinais contrários e como g é contínua no intervalo $[-2, 2]$, o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero de g no intervalo $] -2, 2[$

Em cada uma das restantes opções, $g(-2)$ e $g(2)$ têm o mesmo sinal.

Resposta **A**

4.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \\ &= \frac{1 \times \text{sen} \left(\frac{5\pi}{7} \right)}{2} \approx \\ &\approx 0,39 \end{aligned}$$



Resposta **A**

5. De acordo com a Lei Binomial, $p = {}^5C_2 \left(\frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{5}{6} \right)^3 \approx 0,16$

Resposta **B**

Grupo II

1. Tem-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Substituindo, nesta igualdade, $P(A \cup B)$ por $5P(A \cap B)$, vem:

$$5P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ pelo que}$$

$$6P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

Como $P(A) = P(B)$, vem $6P(A \cap B) = 2P(B)$

Vem, então, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis.

O número de casos possíveis é 6^3 pois, como em cada lançamento existem seis hipóteses, no conjunto dos três lançamentos existem $6 \times 6 \times 6$ possibilidades.

Relativamente aos casos favoráveis a «o produto dos números saídos ser igual a 6», existem duas hipóteses em alternativa, que se excluem mutuamente: ou os números saídos são 1, 2 e 3, ou são 1, 1 e 6. No primeiro caso, temos $3!$ possibilidades, que é o número de permutações de três elementos. No segundo caso, temos 3 possibilidades (a face 6 pode sair, ou no primeiro lançamento, ou no segundo, ou no terceiro). Portanto, o número de casos favoráveis é $3! + 3$.

3.1. Tem-se $f(0) = 100 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+k} = 100 \Leftrightarrow k = 19$

3.2. Tem-se $f(t) = 500 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+24e^{-0,13t}} = 500 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2000 = 500(1 + 24e^{-0,13t}) \Leftrightarrow \frac{2000}{500} = 1 + 24e^{-0,13t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = 1 + 24e^{-0,13t} \Leftrightarrow 3 = 24e^{-0,13t} \Leftrightarrow \frac{3}{24} = e^{-0,13t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} = e^{-0,13t} \Leftrightarrow -0,13t = \ln\left(\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow -0,13t = -\ln 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,13t = \ln 8 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 8}{0,13} \quad \text{Portanto, } t \approx 16$$

4.1.1. Para $x \in]0, 3]$, tem-se $f'(x) = -1 + \frac{3}{1+3x}$

A abscissa do ponto A é a solução da equação $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{1+3x} = 1 \Leftrightarrow 1+3x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

4.1.2. Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1 + x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} + 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) + 1 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [2 - x + \ln(1 + 3x)] = 2 - 0 + \ln(1) = 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$, tem-se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

Uma vez que $f(0) = 2$, tem-se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Portanto, f é contínua no ponto 0

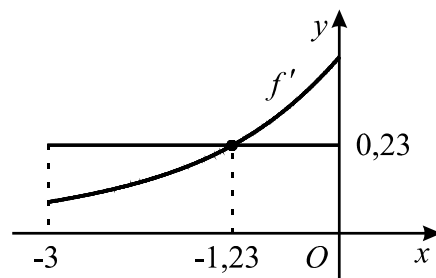
4.2. A abscissa do ponto B é a solução da equação $f'(x) = 0,23$ para $x \in [-3, 0[$

Tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - 1 + x)' \cdot x - (x)' \cdot (e^x - 1 + x)}{x^2} = \\ &= \frac{(e^x + 1) \cdot x - (e^x - 1 + x)}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2} \end{aligned}$$

Na figura está representado o gráfico de f' , para x entre -3 e 0 , a recta de equação $y = 0,23$ e o ponto de intersecção das duas linhas.

A solução da equação $f'(x) = 0,23$ é a abscissa deste ponto.



Portanto, a abscissa do ponto B é $-1,23$

Nota: para obter o gráfico de f' , não era necessário determinar a expressão que a define. Teria bastado utilizar a ferramenta apropriada da calculadora (por exemplo: *nDerive* numa calculadora Texas, $\frac{d}{dx}$ numa calculadora Casio, etc.).