

Prova final de MATEMÁTICA - 3º ciclo

2012 - 2ª Chamada

Proposta de resolução

1.

1.1. Como a soma das frequências relativas é sempre 1, temos que

$$0,3 + a + 0,4 = 1 \Leftrightarrow a = 1 - 0,3 - 0,4 \Leftrightarrow a = 1 - 0,7 \Leftrightarrow a = 0,3$$

Resposta: **Opção 0,3**

1.2. Não. Quando se repete muitas vezes uma experiência aleatória, a frequência relativa de uma observação tende a aproximar-se da probabilidade de acontecer essa observação.

Assim, se repetirmos o procedimento da Maria um milhão de vezes, e metade das bolas no saco tem o número 1, é expectável que a frequência relativa do número 1 se aproxime muito de 0,5

2. Como a probabilidade de seleccionar uma carta vermelha é de 75%, significa, que no conjunto de todas as cartas, as 12 cartas vermelhas são 75% do total, pelo que podemos calcular quantas cartas correspondem a 100%

$$\begin{array}{l} 12 \quad \text{---} \quad 75\% \\ t \quad \text{---} \quad 100\% \end{array}$$

$$t = \frac{12 \times 100}{75} = 16$$

Assim, temos que existem 12 cartas vermelhas num total de 16 cartas, e como só existem cartas vermelhas e pretas, o número de cartas pretas é

$$16 - 12 = 4$$

Resposta: **Opção 4**

3. Como os lados consecutivos de um retângulo são o comprimento, c , e a largura, l , temos que a medida da área, A , do retângulo é

$$\begin{aligned} A = c \times l &= \frac{1}{2r} \times 10^{-20} \times r \times 10^{30} = \frac{1}{2r} \times r \times 10^{-20} \times 10^{30} = \frac{r}{2r} \times 10^{-20+30} = \\ &= \frac{1}{2} \times 10^{10} = 0,5 \times 10^{10} = 5 \times 10^{-1} \times 10^{10} = 5 \times 10^{-1+10} = 5 \times 10^9 \end{aligned}$$

Resposta: **Opção 5×10^9**

4. Como $\pi \approx 3,1416$, o número

$$3,141$$

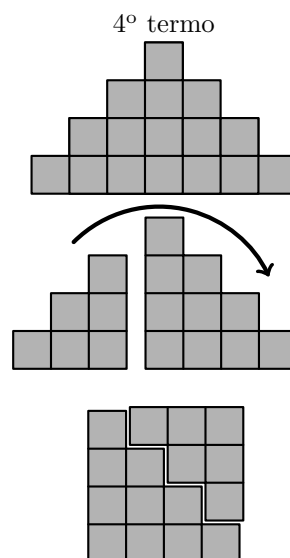
é maior que 3,14 e menor que π



5. Considerando os termos da sequência do número de quadrados em cada figura numa tabela, temos:

Ordem	1	2	3	4	5
Termos	1	4	9	16	25

O que nos permite conjecturar a sequência é a sequência dos quadrados perfeitos... com efeito é possível fazer um arranjo dos quadrados de cada termo da sequência no sentido de verificar que no termo de ordem n , temos exatamente n^2 quadrados (como na figura ao lado).



Assim, como $14^4 = 196$ e $15^2 = 225$, verificamos que 200 não é um quadrado perfeito, ou seja não existe nenhum termo na sequência constituído por 200 quadrados.

6.

- 6.1. Como d é a distância, em milhões de quilómetros, percorrida pela luz em t segundos, temos que no contexto da situação descrita, a afirmação «Tem-se $d = 0,6$ quando $t = 2$ » significa que em 2 segundos a luz percorre uma distância de 0,6 milhões de quilómetros.

- 6.2. Como a distância do Sol à Terra é 150 milhões de quilómetros, temos que $d = 150$, pelo o tempo t , em segundos, que a luz demora a precorrer esta distância é

$$150 = 0,3t \Leftrightarrow \frac{150}{0,3} = t \Leftrightarrow 500 = t$$

Assim, escrevendo o resultado em minutos e segundos, temos que 500 segundos corresponde $\frac{500}{60} \approx 8,33$ minutos.

Como 8 minutos correspondem a $8 \times 60 = 480$ segundos e $500 - 480 = 20$ temos que 500 segundos correspondem a 8 minutos e 20 segundos, ou seja, a luz emitida pelo Sol demora 8 minutos e 20 segundos a chegar à Terra.

7. Resolvendo a inequação, temos

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}(x - 6) &\leq 5x + \frac{10}{3} \Leftrightarrow x - \frac{x}{2} + \frac{6}{2} \leq 5x + \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{1(6)} - \frac{x}{2(3)} + \frac{6}{2(3)} \leq \frac{5x}{1(6)} + \frac{10}{3(2)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{6x}{6} - \frac{3x}{6} + \frac{18}{6} &\leq \frac{30x}{6} + \frac{20}{6} \Leftrightarrow 6x - 3x + 18 \leq 30x + 20 \Leftrightarrow 3x \leq 30x + 20 - 18 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x - 30x &\leq 2 \Leftrightarrow -27x \leq 2 \Leftrightarrow 27x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{27} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left[-\frac{2}{27}, +\infty \right[$$



8. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$x(x-2) + 3(x-2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a = 1, b = -1 \text{ e } c = -6)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1+5}{2} \vee x = \frac{1-5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \vee x = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

$$\text{C.S.} = \{-2, 3\}$$

9. Como o grupo era constituído por 6 adultos, o preço a pagar pelos bilhetes de adulto é de $6x$ e para comprar os bilhetes das 10 crianças, o valor a pagar é de $10y$. Assim, como no total foram pagos 108,70 euros pelos bilhetes, temos que

$$6x + 10y = 108,70$$

Como o Pedro verificou que a diferença total, no caso de ele pagar bilhete de adulto era de 3,45 euros, significa que a diferença entre o preço do bilhete de adulto (x) e de criança (y) é de 3,45 euros, o que nos permite escrever que

$$x - y = 3,45$$

Assim, um sistema de equações que permite determinar o preço do bilhete de adulto (valor de x) e o preço do bilhete de criança (valor de y) é

$$\begin{cases} 6x + 10y = 108,70 \\ x - y = 3,45 \end{cases}$$

10. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, e simplificando, vem

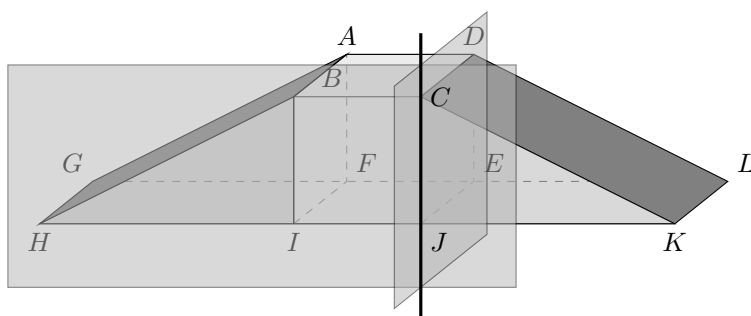
$$(x-a)^2 + 2ax = x^2 - 2 \times a \times x + a^2 + 2ax = x^2 - 2ax + a^2 + 2ax = x^2 + a^2$$

Resposta: **Opção** $x^2 + a^2$

11.

11.1. Como o plano HIB contém toda a face anterior do sólido, e o plano JCD contém toda a face mais à direita do cubo (como podemos observar na figura ao lado), temos que a interseção dos planos HIB e JCD é a

reta CJ



- 11.2. O triângulo $[IHB]$ é retângulo em H , porque é uma base de um dos prismas, e o lado $[HB]$ é a hipotenusa. Temos que, relativamente ao ângulo IHB , $[BI]$ é o cateto oposto, e o lado $[HI]$ é o cateto adjacente, pelo que, usando a definição de tangente, e substituindo as medidas conhecidas, temos:

$$\operatorname{tg}(\hat{IHB}) = \frac{\overline{BI}}{\overline{HI}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 32^\circ = \frac{\overline{BI}}{5} \Leftrightarrow 5 \times \operatorname{tg} 32^\circ = \overline{BI}$$

Como $\operatorname{tg} 32^\circ \approx 0,625$, vem que: $\overline{BI} \approx 5 \times 0,625 \approx 3,125$

Como $[ABDCDEFIJ]$ é um cubo, então o seu volume, V_C , é

$$V_C = \overline{BI}^3 \approx 3,125^3 \approx 30,518 \text{ m}^3$$

Temos ainda que $\overline{AB} = \overline{BI}$, e como $[BHIFAG]$ é um prisma triangular reto, em que o triângulo $[IHB]$ é a base e $[HI]$ é a altura, então o volume do prisma, V_P , é

$$V_P = A_{[IHB]} \times \overline{AB} = \frac{\overline{HI} \times \overline{BI}}{2} \times \overline{AB} \approx \frac{5 \times 3,125}{2} \times 3,125 \approx 24,414 \text{ m}^3$$

Como os prismas $[BHIFAG]$ e $[CKJEDL]$ são geometricamente iguais, têm o mesmo volume, pelo que calculando o volume do sólido, V_S , como a soma dos três volumes, e arredondando o resultado às unidades temos:

$$V_S = V_P + V_C + V_P = 2 \times V_P + V_C \approx 2 \times 24,414 + 30,518 \approx 79 \text{ m}^3$$

12.

- 12.1. Como o ângulo AOC é um ângulo ao centro, e o ângulo ABC é um ângulo inscrito com o mesmo arco correspondente, temos que:

$$\hat{ABC} = \frac{\hat{AOC}}{2} = \frac{140}{2} = 70^\circ$$

Resposta: **Opção 70°**

- 12.2. Como as retas AD e CD são tangentes à circunferência nos pontos A e C , respetivamente temos que os ângulos OAD e OCD são retos.

Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° , considerando o quadrilátero $[OADC]$ temos que

$$\begin{aligned} \hat{ADC} + \hat{OCD} + \hat{AOC} + \hat{OAD} &= 360 \Leftrightarrow \hat{ADC} + 90 + 140 + 90 = 360 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \hat{ADC} + 320 &= 360 \Leftrightarrow \hat{ADC} = 360 - 320 \Leftrightarrow \hat{ADC} = 40^\circ \end{aligned}$$

Como os ângulos ADE e ADC são suplementares, vem que

$$\hat{ADE} + \hat{ADC} = 180 \Leftrightarrow \hat{ADE} + 40 = 180 \Leftrightarrow \hat{ADE} = 180 - 40 \Leftrightarrow \hat{ADE} = 140^\circ$$

13.

- 13.1. Como os triângulos $[ABC]$ e $[DBE]$ são semelhantes (porque têm dois ângulos em comum), podemos afirmar que a razão entre lados correspondentes é igual, e também é igual à razão dos perímetros, ou seja,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{P_{[DBE]}}{P_{[ABC]}}$$

Logo, temos que

$$\frac{\overline{DE}}{12} = \frac{16}{48} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{16 \times 12}{48} \Leftrightarrow \overline{DE} = 4$$

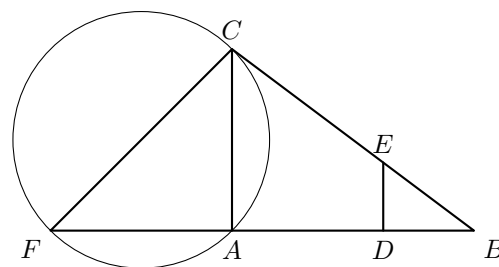
Resposta: **Opção 4**



- 13.2. Como o triângulo $[AFC]$ é retângulo em A , então o lado $[FC]$ é um diâmetro da circunferência que passa nos pontos A , F e C

Temos ainda que $\overline{AC} = 12$ cm e que o triângulo $[AFC]$ é isósceles, pelo que também $\overline{AF} = 12$ cm, e recorrendo ao Teorema de Pitágoras podemos determinar a medida do segmento $[FC]$:

$$\begin{aligned}\overline{FC}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{AF}^2 \Leftrightarrow \overline{FC}^2 = 12^2 + 12^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{FC}^2 &= 144 + 144 \Leftrightarrow \overline{FC}^2 = 288 \xrightarrow{\overline{BC} > 0} \\ \Rightarrow \overline{FC} &= \sqrt{288}\end{aligned}$$



Assim, temos que o raio circunferência é $r = \frac{\sqrt{288}}{2}$, pelo que o comprimento da circunferência em centímetros, arredondado às unidades, é

$$P_o = 2\pi r = 2\pi \times \frac{\sqrt{288}}{2} = \pi \times \sqrt{288} \approx 53 \text{ cm}$$

14. Considerando a rotação de cada ponto, podemos construir o triângulo o transformado do triângulo $[ABC]$ por meio da rotação de centro no ponto O e amplitude 180° e verificar que é o triângulo representado na opção (C)

Resposta: **Opção C**

