Prova final de MATEMÁTICA - 3º ciclo
2013 - 2ª Chamada

Proposta de resolução

1.

1.1. Como se escolhe um aluno do primeiro turno, ou seja, um aluno com um número ímpar, existem 12 escolhas possíveis (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 e 23).
Como se pretende que o número do aluno seja superior a 17, existem 3 escolhas favoráveis a este critério (19, 21 e 23).
Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade de escolher um aluno com número ímpar, de entre os alunos do primeiro turno é

$$p = \frac{4}{12} = \frac{1}{4}$$

Resposta: **Opção B**

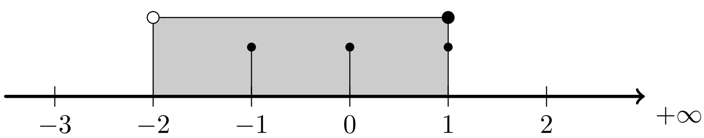
1.2.

1.2.1. A expressão indicada corresponde ao produto de cada idade pela respetiva frequência absoluta, dividido pelo número total de alunos, ou seja, é o cálculo da idade média dos alunos da turma T.

1.2.2. Como se pretende escolher 1 dos 2 alunos de treze anos, e 1 dos 3 alunos de dezasseis anos, existem $2 \times 3 = 6$ escolhas diferentes possíveis.
Como se pretende que a Maria não seja selecionada, existe apenas mais 1 aluno com treze anos, e com se pretende que também o António não seja selecionado, restam apenas mais 2 alunos com dezasseis anos, existem apenas $1 \times 2 = 2$ escolhas favoráveis à condição definida.
Assim, a probabilidade de selecionar um aluno com treze anos e outro com dezasseis, sem que a Maria e o António estejam incluídos na seleção é de

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2. Representando na reta real o intervalo $]-2,1]$, e os números inteiros que pertencem a este conjunto, temos:



Assim, podemos verificar que $A = \{-1, 0, 1\}$

Resposta: **Opção C**

3. Se 1 nanómetro é uma das 10^{-9} partes do metro ($1 \text{ nm} = 0{,}000\,000\,001 \text{ m}$), então, um metro tem $100\,000\,000$ nanómetros ($1 \text{ m} = 100\,000\,000 \text{ nm}$).

Ou seja, 1 metro equivale a 10^9 nanómetros.

4. Simplificando a expressão, usando as regras operatórias de potencias de expoente racional, temos que:

$$\frac{\left(a^4\right)^3}{a^5} = \frac{a^{4\times 3}}{a^5} = \frac{a^{12}}{a^5} = a^{12-5} = a^7$$

Resposta: **Opção B**

5. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$2x(x+1) - (1-x) = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 + x = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 2,\ b = 3 \text{ e } c = -2)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-3+5}{4} \vee x = \frac{-3-5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{4} \vee x = \frac{-8}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -2$$

C.S.$=\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

6. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{1-2x}{3} \leq 1 + \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-2x}{3}_{(2)} \leq \frac{1}{1}_{(6)} + \frac{x+1}{2}_{(3)} \Leftrightarrow \frac{2-4x}{6} \leq \frac{6}{6} + \frac{3x+3}{6} \Leftrightarrow 2 - 4x \leq 6 + 3x + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x - 3x \leq 6 + 3 - 2 \Leftrightarrow -7x \leq 7 \Leftrightarrow 7x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq \frac{-7}{7} \Leftrightarrow x \geq -1$$

C.S.$=[-1, +\infty[$

7. Por observação das equações dos quatro sistemas, podemos verificar que na opção (B), não existem valores de x e y cuja soma possa ser simultaneamente igual a 1 ou a 2, pelo que o sistema não tem soluções, ou seja, é impossível.
De facto, resolvendo cada um dos sistemas, vem:

- (A) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+y+y=1 \\ x=1+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=1-1 \\ x=1+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{0}{2} \\ x=1+0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$
C.S.={(1,0)}

- (B) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 1+y-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 0y=2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 0y=1 \end{cases}$ Equação impossível
C.S.=$\emptyset$

- (C) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2(x+y)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 2x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 2(1-y)+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 2-2y+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 0y=2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 0y=0 \end{cases}$ Equação possível e indeterminada
C.S.=$\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

- (D) $\begin{cases} x+y=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$
C.S.={(0,1)}

Resposta: **Opção B**

8.

8.1. Podemos calcular as imagens dos objetos 50 e 20 pela função f para averiguar qual dos pontos pertence ao gráfico da função:

- $f(50) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$, pelo que nem o ponto $(50,2)$, nem o ponto $\left(50, \frac{1}{2}\right)$ pertencem ao gráfico de f
- $f(20) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, pelo que o ponto $(20,2)$, não pertence ao gráfico de f, mas o ponto $\left(20, \frac{1}{2}\right)$, sim.

Resposta: **Opção D**

8.2. Como o gráfico da função g é uma reta que passa na origem, a expressão algébrica da função é do tipo $g(x) = kx, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Recorremos à função f para calcular a ordenada do ponto P que pertence ao gráfico de f, mas também ao gráfico de g: $f(5) = \frac{10}{5} = 2$

Assim, substituíndo as coordenadas do ponto $P(5,2)$ na expressão da função g, podemos determinar o valor de k: $2 = k \times 5 \Leftrightarrow \frac{2}{5} = k$

Logo a expressão algébrica da função g é: $g(x) = \frac{2}{5}x$

8.3. Como o ponto $B(x_B, y_B)$ pertence ao gráfico da função f, sabemos que $y_B = \frac{10}{x_B}$

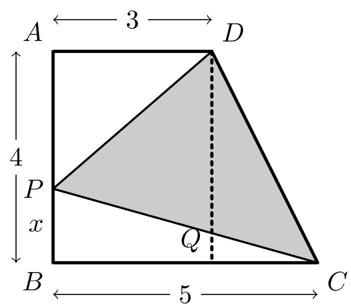
Como $[OABC]$ é um quadrado, então $x_B = \overline{OA} = \overline{OC} = y_B$, ou seja, $x_B = y_B$, pelo que, se substituirmos na igualdade anterior, vem:

$$x_B = \frac{10}{x_B} \Leftrightarrow x_B \times x_B = 10 \Leftrightarrow {x_B}^2 = 10 \underset{x_B>0}{\Rightarrow} x_B = \sqrt{10}$$

Ou seja, o lado do quadrado $[OABC]$ tem $\sqrt{10}$ unidades de comprimento.

9.

9.1. Seja Q a projeção vertical do ponto D sobre a reta BC.



Logo $\overline{BQ} = \overline{AD} = 3$ e que $\overline{DQ} = \overline{AB} = 4$

Podemos também observar que
$\overline{BC} = \overline{BQ} + \overline{QC} \Leftrightarrow \overline{QC} = \overline{BC} - \overline{BQ}$, pelo que $\overline{QC} = 5 - 3 = 2$

Assim, como o triângulo $[DQC]$ é retângulo em Q, usando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\overline{CD}^2 = \overline{DQ}^2 + \overline{QC}^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 4^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 16 + 4 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 20 \underset{\overline{CD}>0}{\Rightarrow} \overline{CD} = \sqrt{20}$$

Logo o perímetro do quadrilátero $[ABCD]$ é:

$$P_{[ABCD]} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 4 + 5 + \sqrt{20} + 3 = 12 + \sqrt{20} \approx 16,5$$

Resposta: **Opção B**

9.2. Para que os triângulos sejam semelhantes, a razão entre lados correspondentes deve ser igual, ou seja,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}$$

(Os lados que se opõem ao ângulo reto em cada triângulo são semelhantes, ou seja, os lados, $[CP]$ e $[DP]$; depois o lado menor de cada triângulo são $[BP]$ e $[AP]$ - não poderá ser o lado $[AD]$ no triângulo $[ADP]$ para que os triângulos sejam semelhantes - e finalmente, os dois lados de comprimento intermédios são $[BC]$ e $[AD]$).
Como $\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB}$, temos que $4 = \overline{AP} + x \Leftrightarrow \overline{AP} = 4 - x$
Assim, substituindo na relação de proporcionalidade estabelecida, e resolvendo a equação, vem:

$$\frac{5}{3} = \frac{x}{4-x} \Leftrightarrow 5(4-x) = 3x \Leftrightarrow 20 - 5x = 3x \Leftrightarrow 20 = 3x + 5x \Leftrightarrow 20 = 8x \Leftrightarrow \frac{20}{8} = x \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

9.3. Calculando a área do triângulo $[BPC]$ temos:

$$A_{[BPC]} = \frac{\overline{PB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2}$$

Como $\overline{PA} = \overline{AB} - \overline{PB} = 4 - 1 = 3$, a área do triângulo $[PAD]$ é:

$$A_{[PAD]} = \frac{\overline{PA} \times \overline{AD}}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

Relativamente ao trapézio $[ABCD]$, temos que a base maior é $[BC]$, a base menor é $[AD]$ e a altura é $[AB]$, logo, calculando a área, vem:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{AB} = \frac{5+3}{3} \times 4 = \frac{8}{2} \times 4 = 4 \times 4 = 16$$

Desta forma, podemos calcular a área do triângulo $[DCP]$, como a diferenças das áreas:

$$A_{[CDP]} = A_{[ABCD]} - A_{[BPC]} - A_{[PAD]} = 16 - \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = 16 - \frac{14}{2} = 16 - 7 = 9$$

Ou seja, o triângulo $[DCP]$ tem 9 unidades de área.

10.

10.1. Como o ângulo AOC é um ângulo ao centro, o arco correspondente tem a mesma amplitude, logo:

$$\overset{\frown}{AC} = A\hat{O}C = 72^\circ$$

Como o ângulo ABC é um ângulo inscrito, tem metade da amplitude do arco correspondente, ou seja,

$$A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{72}{2} = 36^\circ$$

10.2. O triângulo $[ADO]$ é retângulo em D, porque $[BC]$ é perpendicular a $[AC]$. Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, também o triângulo AOC é, porque têm a base em comum, e o vértice oposto à base está sobre a altura. Assim, o ângulo AOC é tem o dobro da amplitude do ângulo AOD, logo:

$$A\hat{O}D = \frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{72}{2} = 36^\circ$$

Desta forma, o lado $[OA]$ é a hipotenusa do triângulo $[AOD]$, e relativamente ao ângulo AOD, $[AD]$ é o cateto oposto, pelo que, usando a definição de seno, temos:

$$\text{sen } 36^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \text{sen } 36^\circ = \frac{\overline{AD}}{2} \Leftrightarrow 2 \times \text{sen } 36^\circ = \overline{AD}$$

Como $\text{sen } 36^\circ \approx 0,588$, vem que: $\overline{AD} \approx 2 \times 0,588 \approx 1,176$

Como o ângulo ABD é o ângulo inscrito relativo ao mesmo arco que o ângulo ao centro AOD tem o metade da amplitude do ângulo AOD, logo:

$$A\hat{B}D = \frac{A\hat{O}D}{2} = \frac{36}{2} = 18^\circ$$

Desta forma, como o triângulo $[ABD]$ é retângulo em D, relativamente ao ângulo ABD, $[AD]$ é o cateto oposto e $[BD]$ é o cateto adjacente, pelo que, usando a definição de tangente, temos:

$$\text{tg } 18^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \text{tg } 18^\circ \times \overline{BD} = \overline{AD} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{\overline{AD}}{\text{tg } 18^\circ}$$

Como $\overline{AD} \approx 1,176$ e $\text{tg } 18^\circ \approx 0,325$, vem que: $\overline{BD} \approx \dfrac{1,176}{0,325} \approx 3,618$

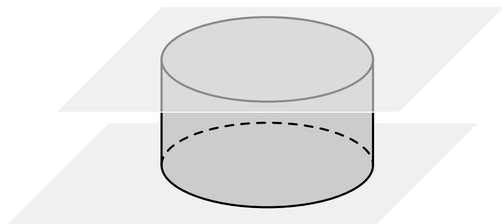
Como a medida da altura do triângulo $[ABC]$ é $\overline{BD} \approx 3,618$ e a medida da base é $\overline{AC} = 2 \times \overline{AD} \approx 2 \times 1,176 \approx 2,352$, calculando a área do triângulo $[ABC]$, vem:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} \approx \frac{2,352 \times 3,618}{2} \approx 4,255$$

Desta forma, o valor aproximado às décimas da área do triângulo $[ABC]$ é de 4,3 cm^2

11.

11.1. Os planos a que pertencem as bases opostas de um cilindro são paralelos.



11.2. Como o recipiente cilíndrico estava cheio, o volume de líquido que transbordou é igual ao volume do cubo, pelo que o volume de líquido que ficou no recipiente (V_{Final}) é a diferença entre o volume do cilindo (V_{Cilindro}) e o volume do cubo (V_{Cubo}):

$$V_{\text{Final}} = V_{\text{Cilindro}} - V_{\text{Cubo}}$$

Calculando o volume do cubo, como a aresta tem 6 cm de medida, temos:

$$V_{\text{Cubo}} = a^3 = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$$

Calculando o volume do cilindro, como a altura é igual á aresta do cubo (6 cm de medida) e a medida do raio da base é 5 cm, temos:

$$V_{\text{Cilindro}} = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 5^2 \times 6 \approx 471,24 \text{ cm}^3$$

Assim, calculando o volume de líquido que ficou no recipiente, e arredondando o resultado às unidades, vem:

$$V_{\text{Final}} \approx 471,24 - 216 \approx 255,24 \approx 255 \text{ cm}^3$$