

**PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E
COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR**
MATEMÁTICA 26/06/2008

Atenção: | *Não é permitido o uso de calculadora nem de telemóvel.*

Duração: 120m

Justifique os raciocínios utilizados na resolução das questões.

1. Considere a seguinte função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt[5]{9-x^2}}, & x > -1 \\ \frac{x}{2e^x}, & x \leq -1 \end{cases}$$

1.1.[1, 0 val.] Determine o domínio da função f .

1.2.[1, 0 val.] Calcule, caso existam, os zeros de f .

1.3.[1, 0 val.] Calcule, caso exista, o limite de f no ponto 3.

1.4.[1, 0 val.] Estude a continuidade de f no ponto $x = -1$.

1.5.[1, 0 val.] Utilizando a **definição de diferenciabilidade num ponto**, prove que a função f não é diferenciável no ponto $x = -1$.

2.[3, 5 val.] Seja g a função, real de variável real, com $g(x) = x \ln x$.
Faça o estudo completo de g , incluindo o esboço gráfico.

3.[1, 5 val.] Seja $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ e $\theta \in \left] \pi, \frac{3}{2}\pi \right[$. Calcule $\frac{\cos \theta + 5 \sin \theta \cdot \cos \theta}{\operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{cotg} \theta}$.

4. Considere as sucessões, com $n \geq 1$:

$$U_n = \frac{3^n}{n!} \quad W_n = \frac{n^2}{1+n^2} - 2 \quad Y_n = \left(\frac{2n-5}{2n+7} \right)^{1-n}$$

Indique o valor lógico das seguintes afirmações, **justificando**.

4.1.[1, 0 val.] A sucessão de termo geral U_n é monótona crescente.

4.2.[1, 0 val.] A sucessão de termo geral W_n é limitada.

4.3.[1, 0 val.] A sucessão de termo geral Y_n é convergente.

5.[1, 0 val.] Recorrendo às propriedades dos somatórios determine o valor numérico da expressão:

$$\sum_{i=3}^{52} i^2 - \sum_{i=1}^{50} (i^2 + 4i)$$

6.[1, 5 val.] Os números inteiros e positivos como 1991, que se lêem da mesma maneira da direita para esquerda e da esquerda para a direita, chamam-se capicuas. Quantas capicuas com 3 algarismos se podem escrever com os algarismos de 1 a 9?

7.[1, 5 val.] Resolva, em \mathbb{N} , a equação

$$\frac{(n+2)! - 2n!}{n!} = 4$$

8. Considere uma experiência e dois acontecimentos associados a esta, A e B , tais que $P(\bar{A}) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ e $P(A \cup B) = 0.8$.

8.1.[1, 0 val.] Determine $P(A \cap B)$ e $P(B - A)$.

8.2.[1, 0 val.] Os acontecimentos A e B são incompatíveis?

9.[1, 0 val.] Numa fábrica fez-se um teste ao tempo de vida (em horas) de 150 lâmpadas e registou-se a seguinte informação:

Classes (tempos de vida em horas)	Frequências absolutas
$[0, 300[$	5
$[300, 600[$	10
$[600, 900[$	42
$[900, 1200[$	75
$[1200, 1500]$	18
<i>Total</i>	<i>150</i>

Construa a tabela das *frequências absolutas acumuladas* e represente-as através de um histograma.