UNIVERSIDADE da MADEIRA

Centro de Competência de Ciências Exactas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR

MATEMÁTICA 12/06/2012

Atenção:

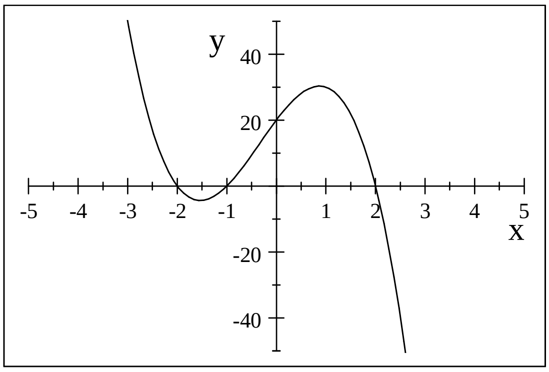
Não é permitido o uso de ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel****.*

Justifique *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*

Esta prova tem a duração de ***120m****.*

Questões:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cotações:	$3,0$	$4,0$	$3,0$	$3,0$	$4,0$	$3,0$

1. A figura seguinte representa o gráfico de um polinómio, $p(x)$, do terceiro grau:



1.1 Mostre que $p(x) = -5x^3 - 5x^2 + 20x + 20$.

1.2 Resolva a equação $p'(x) = -5$.

1.3 Indique os valores de x tais que: $p(x) > 0$

2. Seja, em $\mathbb{R}$, a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} & x \leq -2 \\ \sqrt{x^2+1} & -2 < x \leq 0 \\ \log(2x+1) & x > 0 \end{cases}$$

Indique o valor lógico das seguintes afirmações, **justificando**:

2.1 "O domínio de g é $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$"

2.2 "Os zeros da função g são $\{-1, 0, 1\}$"

2.3 "$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$"

2.4 "A função g é contínua em $x = 0$"

2.5 "A função g tem uma assímptota vertical"

3. Considere $\sin\left(x + \dfrac{3}{2}\pi\right) = \dfrac{3}{5}$ e $\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi$.

Calcule:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin(7\pi - x) + \cos(x+3\pi)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

4. Seja a sucessão de termo geral $v_n = 5 - \dfrac{1}{n+1}$

4.1 Verifique se $\dfrac{49}{10}$ é um termo da sucessão.

4.2 A sucessão é convergente? **Justifique**.

5. Considere as seguintes sucessões, com $n \geq 1$:

(A) $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$ **(B)** $b_n = \dfrac{\sqrt{2n}}{n}$

(C) $c_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n+7}\right)^{2-n}$ **(D)** $d_n = 2 + (-1)^n \, \dfrac{1}{n}$

5.1 Indique **um exemplo** para cada uma das questões, **justificando**:

5.1.1 Uma sucessão monótona crescente.

5.1.2 Uma sucessão minorada mas não majorada.

5.1.3 Uma sucessão limitada.

5.2 Calcule: $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n$

6. Determine a e b de modo que: $\dfrac{(a-2bi)\,(3+i)}{1-i} = 5$

UNIVERSIDADE da MADEIRA
Centro de Competência de Ciências Exactas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR

MATEMÁTICA 12/06/2012

SOLUÇÕES

1.1 Os zeros do polinómio p são: $-2, -1, 2$ e $p(0) = 20$

$$\begin{aligned}
p(x) &= a(x-(-2))(x-(-1))(x-2) \\
&= a(x+2)(x+1)(x-2) \\
\text{como } p(0) &= 20 \Leftrightarrow a(0+2)(0+1)(0-2) = 20 \\
&\Leftrightarrow a = -5 \\
\text{então temos } p(x) &= -5(x+2)(x+1)(x-2) \\
&= -5\left(x^3 + x^2 - 4x - 4\right) \\
&= -5x^3 - 5x^2 + 20x + 20
\end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned}
p'(x) = -5 &\Leftrightarrow -15x^2 - 10x + 20 = -5 \\
&\Leftrightarrow -15x^2 - 10x + 25 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{5}{3} \\
&\Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{5}{3}, 1\right\}
\end{aligned}$$

1.3 Tendo em atenção o gráfico :

$$p(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]-1, 2\right[$$

2. Seja, em $\mathbb{R}$, a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} & x \leq -2 \\ \sqrt{x^2+1} & -2 < x \leq 0 \\ \log(2x+1) & x > 0 \end{cases}$$

2.1 **F**, o domínio de g é $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{x}{1-x^2}, \quad D_{g_1} = \mathbb{R} \backslash \{-1,1\} \quad \text{temos} \quad]-\infty,-2] \subset \mathbb{R} \backslash \{-1,1\} \\ g_2(x) &= \sqrt{x^2+1}, \quad D_{g_2} = \mathbb{R} \quad \text{temos} \quad]-2,0] \subset \mathbb{R} \\ g_3(x) &= \log(2x+1), \quad D_{g_3} = \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\quad \text{temos} \quad]0,+\infty[\subset \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\end{aligned}$$

2.2 **F**, a função g não tem zeros

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{mas} \quad 0 \notin]-\infty,-2] \\ g_2(x) &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 0 \text{ impossível (em } \mathbb{R}) \\ g_3(x) &= 0 \Leftrightarrow \log(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{mas} \quad 0 \notin]0,+\infty[\end{aligned}$$

2.3 **V**,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} (\log(2x+1)) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{1-x^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

2.4 **F**, a função g não é contínua em $x = 0$, porque $g(0) \neq \lim_{x\to0^+} g(x)$

$$g(0) = 1$$
$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} (\log(2x+1)) = \log 1 = 0$$

2.5 **F**, a função g não tem assímptotas verticais, porque o $D_g = \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} g(x) &= \lim_{x\to 0^+} (\log(2x+1)) = \log 1 = 0 \neq \infty \\
\lim_{x\to 0^-} g(x) &= \lim_{x\to 0^-} \left(\sqrt{x^2+1}\right) = 1 \neq \infty \\
\lim_{x\to (-2)^+} g(x) &= \lim_{x\to (-2)^+} \left(\sqrt{x^2+1}\right) = \sqrt{5} \neq \infty \\
\lim_{x\to (-2)^-} g(x) &= \lim_{x\to (-2)^-} \left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \frac{2}{3} \neq \infty
\end{aligned}$$

3. $\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3}{5}$ e $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

$$\underbrace{\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)}_{-\cos x} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin x}\underbrace{\sin(7\pi - x)}_{\sin x} + \underbrace{\cos(x+3\pi)}_{-\cos x}\underbrace{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{\cos x} = \\
&= -\sin x \sin x + (-\cos x \cos x) \\
&= -\sin^2 x - \cos^2 x \\
&= -\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

4. $v_n = 5 - \frac{1}{n+1} = \frac{5n+4}{n+1}$

4.1 $\frac{49}{10}$ é o 9^o termo de v_n

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{49}{10} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{5n+4}{n+1} = \frac{49}{10} \\
&\Leftrightarrow \quad 50n + 40 = 49n + 49 \\
&\Leftrightarrow \quad n = 9
\end{aligned}$$

4.2 A sucessão de termo geral v_n é convergente porque

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} v_n &= \lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5n+4}{n+1}\right) \\
&= 5\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

5.1

$$\begin{aligned}
\textbf{(A)}\quad a_n &= \frac{n!}{2^n} \\
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!2^n}{2^n 2n!} \\
&= \frac{n+1}{2}\geq 1,\ \ \text{monótona crescente} \\
a_1 &= \frac{1}{2}\ \text{menor termo,}\ \ a_n\ \text{é minorada mas não majorada}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(B)}\quad b_n &= \frac{\sqrt{2n}}{n} \\
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\left(\sqrt{2n+2}\right)n}{(n+1)\sqrt{2n}} \\
&= \sqrt{\frac{n}{n+1}}<1,\ \ \text{monótona decrescente} \\
b_1 &= \sqrt{2}\ \text{é o maior termo,}\ b_n\ \text{é majorada} \\
\text{como}\ b_n &= \frac{\sqrt{2n}}{n}>0\ \ b_n\ \text{é limitada}\ \left(0\leq b_n\leq\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(C)}\quad c_n &= \left(\frac{2n-1}{2n+7}\right)^{2-n} \\
\lim_{n\to+\infty} c_n &= e^4\ \text{(resolução na alínea } \textbf{5.2}\text{)} \\
& \quad c_n\ \text{é limitada}\ \ \left(0\leq c_n\leq e^4\right)
\end{aligned}$$

(D) $\quad d_n = 2 + (-1)^n \dfrac{1}{n} = \begin{cases} 2 + \dfrac{1}{2} & n \text{ par} \\ 2 - \dfrac{1}{2} & n \text{ ímpar} \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 2$

d_n é limitada $\quad \left(1 \leq d_n \leq \dfrac{5}{2}\right)$

5.1.1 Uma sucessão <u>monótona crescente</u>: $\quad a_n$

5.1.2 Uma sucessão <u>minorada mas não majorada</u>: $\quad a_n$

5.1.3 Uma sucessão <u>limitada</u>: $\quad b_n$ ou c_n ou d_n

5.2

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} c_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+7}\right)^{2-n} \\
&= \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+7}\right)^{2}}_{1} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+7}\right)^{-n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+7}\right)^{-n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+7}{2n-1}\right)^{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n\left(1+\frac{7}{2n}\right)}{2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)}\right)^{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\frac{7}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}\right)^{n} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{7}{2n}\right)^{n}}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\frac{7}{2}}{n}\right)^{n}}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^{n}} = \frac{e^{\frac{7}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = e^4
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\frac{(a-2bi)\,(3+i)}{1-i}=5 \;&\Leftrightarrow\; \frac{3a+ai-6bi-2bi^2}{1-i}=5\\
\overset{i^2=-1}{\Leftrightarrow}\; \frac{3a+ai-6bi+2b}{1-i}-5 \;&=\; 0\\
&\Leftrightarrow\; \frac{3a+ai-6bi+2b-5+5i}{1-i}=0\\
&\Leftrightarrow\; \frac{(3a+ai-6bi+2b-5+5i)\,(1+i)}{(1-i)\,(1+i)}=0\\
&\Leftrightarrow\; \frac{2a+8b-10+4ai-4bi}{1-i^2}=0\\
&\Leftrightarrow\; \frac{(2a+8b-10)+(4a-4b)\,i}{2}=0\\
&\Leftrightarrow\; \frac{2\,(a+4b-5)+2\,(2a-2b)\,i}{2}=0\\
&\Leftrightarrow\; (a+4b-5)+(2a-2b)\,i=0\\
&\Leftrightarrow\; \begin{cases} a+4b-5=0\\ 2a-2b=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\; \begin{cases} a=1\\ b=1\end{cases}
\end{aligned}$$