UNIVERSIDADE da MADEIRA

Centro de Competência de Ciências Exactas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR

MATEMÁTICA - 18/06/2014

Atenção: *Não é permitido o uso de* **calculadora** *nem de* **telemóvel**. *Esta prova tem a duração de 120m.*

Nome: ______________________________________

N^o__________**Curso:**__________________________

GRUPO I (10 valores)

As questões, do ***GRUPO I****, são de escolha múltipla. Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais* ***só uma*** *está correta.*
Assinale, no enunciado, a resposta escolhida com um ***X****.*
Resposta correta: **2, 0** valores **Resposta não assinalada:** **0** valores
Resposta incorreta: **0** valores

1. Considere a função real $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2}{xe^{x-1}}}$. O domínio de f é:

(A) $]0, +\infty[$ ____ **(C)** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ____

(B) $\mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$ ____ **(D)** $\mathbb{R}$ ____

2. Seja a sucessão de termo geral $w_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(2n - n^2)}{3n^2 + 2n}$. Podemos afirmar que:

(A) $\overline{\lim} w_n > 0$ ____ **(C)** $-1 < \underline{\lim} w_n < 0$ ____

(B) $\overline{\lim} w_n = \underline{\lim} w_n$ ____ **(D)** $\overline{\lim} w_n < -\underline{\lim} w_n$ ____

3. Considere a sucessão de termo geral $a_n = \dfrac{n!n^2}{2}$. A alínea **<u>falsa</u>** é:

(A)	a_n é convergente	____	**(C)**	$a_3 = 3^3$	____
(B)	a_n é monótona crescente	____	**(D)**	$a_4 > a_3$	____

4. O valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1} \right)^{n+1}$ é:

(A)	$\dfrac{1}{2}$	____	**(C)**	$-\infty$	____
(B)	$+\infty$	____	**(D)**	0	____

5. Considere a função real $g(x) = \sin(\pi x^2)$. Podemos afirmar que:

(A)	$g'(-1) = 0$	____	**(C)**	$g'(-1) = 2\pi$	____
(B)	$g'(-1) = -2\pi$	____	**(D)**	$g'(-1) = \pi$	____

GRUPO II (10 valores)

Justifique, na folha de prova, os raciocínios utilizados na resolução das questões.

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2. Qual das seguintes alíneas é uma equação da reta r? **Justifique.**

(A) $y = 4x - 4$

(B) $y = 4x + 4$

(C) $y = 2x$

(D) $y = 4x + 6$

2. O ângulo agudo θ é tal que $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Determine $\cos(2\theta)$ e θ.

3. Considere a função real $h(x) = \dfrac{x}{e^x}$

3.1 Calcule as assímptotas de h, caso existam.

3.2 A função h tem zeros? No caso afirmativo indique-os.

3.3 Estude a monotonia de h.

3.4 Existem pontos de inflexão em h?

4. Averigúe se j é uma função contínua no ponto $x = 0$.

$$j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \log(e - x) & x \leq 0 \\ \dfrac{-3x}{1 - 2^{2x}} & x > 0 \end{cases}$$

Fórmulas:

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Questões:	1	2	3	4
Cotações:	2,0	2,5	3,0	2,5

UNIVERSIDADE da MADEIRA
Centro de Competência de Ciências Exactas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR MATEMÁTICA - 18/06/2014

SOLUÇÕES

GRUPO I (10 valores)

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : xe^{x-1} \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\begin{aligned} xe^{x-1} \neq 0 &\Leftrightarrow x \neq 0 \wedge e^{x-1} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq 0 \end{aligned}$$

(C) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

2. $w_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(2n-n^2)}{3n^2+2n}$

$$w_n = \begin{cases} \dfrac{-2n+n^2}{3n^2+2n} & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{2n-n^2}{3n^2+2n} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n \text{ par}, \quad \lim w_n &= \lim\left(\frac{-2n+n^2}{3n^2+2n}\right) = \frac{1}{3} \\ n \text{ ímpar}, \quad \lim w_n &= \lim\left(\frac{2n-n^2}{3n^2+2n}\right) = -\frac{1}{3} \\ \overline{\lim} w_n &= \frac{1}{3} \quad \underline{\lim} w_n = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Devido a um lapso de escrita, nesta questão estão duas alíneas corretas,

(A) $\overline{\lim} w_n > 0$ _____ ou **(C)** $-1 < \underline{\lim} w_n < 0$

3. $a_n = \dfrac{n!n^2}{2}$

$$\lim a_n = \lim \frac{n!n^2}{2} = +\infty, \quad a_n \text{ é divergente}$$

(A) é falsa

(A) a_n é convergente

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n+1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}\underbrace{\lim\left(\frac{n}{2n+1}\right)}_{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}_{0}}{\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}}_{e^{\frac{1}{2}}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(D) 0

5. $g(x) = \sin\left(\pi x^2\right)$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2x\pi\cos\left(\pi x^2\right) \\
g'(-1) &= 2(-1)\pi\cos\left(\pi(-1)^2\right) = -2\pi\underbrace{\cos\pi}_{-1} = 2\pi
\end{aligned}$$

(C) $g'(-1) = 2\pi$

GRUPO II (10 valores)

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \to f'(2) = 4 = m \\
\underbrace{\text{abcissa } 2}_{x} &\to f(2) = 2^2 = 4 \to \Big(\underset{x_0}{2}, \underset{y_0}{4}\Big) \\
y - y_0 &= m(x - x_0) \to y - 4 = 4(x-2) \Leftrightarrow y = 4x - 4
\end{aligned}
$$

(A) $y = 4x - 4$

2. θ ângulo agudo, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Determine $\cos(2\theta)$ e θ.

$$
\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= \cos^2\theta - \left(1 - \cos^2\theta\right) \\
&= -1 + 2\cos^2\theta \\
&= -1 + 2(\cos\theta)^2 \\
\text{com } \cos\theta &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ temos:} \\
\cos(2\theta) &= -1 + 2\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 \\
&= -1 + 2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) \\
&= -1 + \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{-2+2-\sqrt{2}}{2} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(2\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\theta = \frac{3}{4}\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{3}{8}\pi
\end{aligned}
$$

3. $h(x) = \dfrac{x}{e^x}$

3.1 assímptotas de h

não existem assímptotas verticais porque:

$D_h = \mathbb{R}$ e h é uma função contínua em $\mathbb{R}$

assímptotas não verticais:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

assímptota horizontal $y = 0 \quad (x \to +\infty)$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

3.2 zeros de h

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$

3.3 monotonia de h

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x} \\ h'(x) &= 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

		1	
$1-x$	$+$	0	$-$
e^x	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-x}{e^x}$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	max $\left(1, \frac{1}{e}\right)$	$\searrow$

$$h(1) = \frac{1}{e}$$

3.4 pontos de inflexão em h

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{e^x(x-2)}{(e^x)^2} = \frac{x-2}{e^x} \\ h''(x) &= 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

		2	
$x-2$	$-$	0	$+$
e^x	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-2}{e^x}$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\cap$	PI $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$	$\cup$

$$h(2) = \frac{2}{e^2}$$

4. Averigúe se j é uma função contínua no ponto $x = 0$.

$$j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \log(e - x) & x \leq 0 \\ \dfrac{-3x}{1 - 2^{2x}} & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} j(0) &= \frac{1}{2} + \log(e) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \to 0^+} j(x) &= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{-3x}{1 - 2^{2x}} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{-3}{-2^{2x} 2 \log 2} \right) = \frac{3}{2 \log 2} \\ j(0) &\neq \lim_{x \to 0^+} j(x), \;\; j \text{ não é contínua em } x = 0 \end{aligned}$$

Fórmulas:

$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$