UNIVERSIDADE da MADEIRA

Centro de Competência de Ciências Exactas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR

MATEMÁTICA - 16/06/2015

Atenção:
Não é permitido *o uso de* ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel****.*
Justifique *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Esta prova tem a duração de ***120m****.*

Questões:	1	2.(a)	2.(b)	2.(c)	2.(d)	2.(e)	3.	4.(a)	4.(b)	5.	6.
Cotações:	2,5	1,5	2,0	2,0	1,5	1,5	2,5	1,5	1,0	2,0	2,0

1. Determine o domínio da função:

$$g(x) = \ln\left(\frac{-x^2+1}{x+2}\right)$$

2. Considere a seguinte função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(-3x)}{x}, & \text{se } x < 0 \\ x-3, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Calcule, caso existam, os zeros da função f;

(b) Prove que a função f é contínua em $x = 0$;

(c) Diga, **justificando**, o valor lógico da seguinte afirmação:
"A função f é diferenciável no ponto $x = 0$";

(d) Determine a função derivada de f;

(e) Prove que $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

3. Estude a **monotonia e a existência de extremos** da função:

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{x^3-6x^2+9x}$$

V.S.F.F.

4. Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por:

$$u_n = \begin{cases} e, & \text{se } n < 16 \\ \\ \left(1+\frac{2}{3n}\right)^{3n+1}, & \text{se } n \geq 16 \end{cases}$$

(a) Calcule o $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$;

(b) Mostre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

5. Resolva, em $\mathbb{C}$, a seguinte equação:

$$z^2 - 4z = 5\operatorname{cis}(\pi)\,.$$

6. Represente no plano d' Argand o seguinte conjunto:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z+i| \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq 0\right\}.$$

UNIVERSIDADE da MADEIRA

Centro de Competência de Ciências Exactas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR

MATEMÁTICA - 16/06/2015

RESOLUÇÃO

1. Domínio de $g(x) = \ln\left(\dfrac{-x^2+1}{x+2}\right)$

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{-x^2+1}{x+2} > 0 \wedge x+2 \neq 0\right\}$$

Cálculos Auxiliares

$$\begin{aligned} -x^2+1 &= 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \\ x+2 &\neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \end{aligned}$$

Quadro de sinal

		-2		-1		1	
$-x^2+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{-x^2+1}{x+2}$	$+$	SS	$-$	0	$+$	0	$-$

Logo

$$D_g = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]-1, 1\right[$$

2. Considere a seguinte função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(-3x)}{x}, & \text{se } x < 0 \\ x-3, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Zeros da função f;
Para $x < 0$ temos

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(-3x)}{x} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin(-3x) = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x < 0 \\ \Leftrightarrow\ & -3x = 0 + k\pi \wedge x < 0 \wedge k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{k}{3}\pi \wedge k \in \mathbb{Z}^+ \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{k}{3}\pi \wedge k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Para $x \geq 0$ temos

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Logo o conjunto dos zeros de f é $\left\{ x \in \mathbb{R} : x = 3 \vee x = -\frac{k}{3}\pi \wedge k \in \mathbb{N} \right\}$.

(b) f é contínua em $x = 0$ se, e só se,

$$\exists \lim_{x \to 0^-} f(x), \exists \lim_{x \to 0^+} f(x) \wedge \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

Temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(-3x)}{x} = \frac{0}{0} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{-3\cos(-3x)}{1} \\ &= -3\cos 0 = -3 \end{aligned}$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 3) = -3$$

Assim

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = -3 = f(0),$$

donde f é contínua em $x = 0$.

(c) Diga, **justificando**, o valor lógico da seguinte afirmação:
"A função f é diferenciável no ponto $x = 0$";

f é diferenciável no ponto $x = 0$ se, e só se,

$$\exists f'\left(0^-\right), \exists f'\left(0^+\right) \wedge f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right)$$

Ora,

$$\begin{aligned} f'\left(0^-\right) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{\sin(-3x)}{x} - (-3)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(-3x) + 3x}{x^2} = \frac{0}{0} \\ &\underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{-3\cos(-3x) + 3}{2x} = \frac{0}{0} \\ &\underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{-3.3\sin(-3x)}{2} = 0 \end{aligned}$$

Vejamos agora a derivada à direita do ponto $x = 0$

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 3 + 3}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

Como $f'(0^-) = 0 \neq 1 = f'(0^+)$ então f não é diferenciável no ponto $x = 0$, ou seja, $\nexists f'(0)$, o que significa que a afirmação é FALSA.

(d) Função derivada de f

Para $x<0$ temos

$$f'(x)=\left(\frac{\sin(-3x)}{x}\right)'=\frac{-3x\cos(-3x)-\sin(-3x)}{x^2}=\frac{-3x\cos(3x)+\sin(3x)}{x^2}$$

Para $x>0$ temos

$$f'(x)=(x-3)'=1$$

Pela alínea (c) vimos que $\nexists f'(0)$, logo a função derivada de f é:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-3x\cos(3x)+\sin(3x)}{x^2}, & \text{se } x<0\\[2ex] 1, & \text{se } x>0\end{cases}$$

(e) Prove que $y=0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sin(-3x)}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sin(3x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{infinitésimo}}\underbrace{\sin(3x)}_{\text{função limitada}}=0\end{aligned}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin(-3x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{\text{infinitésimo}}\underbrace{\sin(3x)}_{\text{função limitada}}=0,$$

logo $y=0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

3. **Monotonia e extremos** da função:

$$f(x)=\frac{1}{3}e^{x^3-6x^2+9x}$$

Derivada de f :

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(3x^2-12x+9\right)e^{x^3-6x^2+9x}=\left(x^2-4x+3\right)e^{x^3-6x^2+9x}$$

Zeros da 1^a derivada:

$$\begin{aligned}&f'(x)=0\Leftrightarrow\left(x^2-4x+3\right)e^{x^3-6x^2+9x}=0\\ \Leftrightarrow\ & x^2-4x+3=0\vee e^{x^3-6x^2+9x}=0\\ \Leftrightarrow\ & x^2-4x+3=0\\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}\\ \Leftrightarrow\ & x=2\pm1\\ \Leftrightarrow\ & x=1\vee x=3\end{aligned}$$

		1		3	
x^2-4x+3	$+$	0	$-$	0	$+$
$e^{x^3-6x^2+9x}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max $\left(1,\frac{1}{3}e^4\right)$	$\searrow$	min $\left(3,\frac{1}{3}\right)$	$\nearrow$

$\therefore$ f é crescente no intervalo $]-\infty,1[$ e no intervalo $]3,+\infty[$;

f é decrescente no intervalo $]1,3[$;

f tem um máximo em $x=1$ e o valor do máximo é: $f(1)=\dfrac{1}{3}e^{1-6+9}=\dfrac{1}{3}e^4$

f tem um mínimo em $x=3$ e o valor do mínimo é: $f(3)=\dfrac{1}{3}e^{27-54+27}=\dfrac{1}{3}e^0=\dfrac{1}{3}$

4. Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por:

$$u_n=\begin{cases} e, & \text{se } n<16 \\ \left(1+\dfrac{2}{3n}\right)^{3n+1}, & \text{se } n\geq 16\end{cases}$$

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}u_n &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{3n}\left(1+\frac{2}{3n}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{3n}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)\\ &= e^2(1+0)=e^2\end{aligned}$$

(b) Por (a) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e^2\in\mathbb{R}$, logo a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, o que implica imediatamente que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

5. Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação:

$$\begin{aligned}& z^2-4z=5\operatorname{cis}(\pi)\\ \Leftrightarrow\ & z^2-4z-5(\cos\pi+i\sin\pi)=0\\ \Leftrightarrow\ & z^2-4z-5(-1)=0\\ \Leftrightarrow\ & z=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}\\ \Leftrightarrow\ & z=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}\\ \Leftrightarrow\ & z=\frac{4\pm 2i}{2}\\ \Leftrightarrow\ & z=2+i\vee z=2-i\end{aligned}$$

6. Represente no plano d' Argand o seguinte conjunto:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z+i| \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq 0\right\}.$$

Temos

$$\begin{aligned} & |z+i| \leq 3 \\ \Leftrightarrow\ & |x+yi+i| \leq 3 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x^2+(y+1)^2} \leq 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+(y+1)^2 \leq 9 \text{ (círculo de centro } (0,-1) \text{ e raio 3)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & |z+i| \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ & |x+yi+i| \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+(y+1)^2 \geq 1 \text{ (exterior do círculo de centro } (0,-1) \text{ e raio 1)} \end{aligned}$$

Representação no plano d'Argand: