UNIVERSIDADE da MADEIRA

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR

MATEMÁTICA - 15/06/2016

Atenção:
Não é permitido *o uso de* ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel****.*
Justifique *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Esta prova tem a duração de ***120m****.*

Questões:	1.(a)	1.(b)	2.(a)	2.(b)	2.(c)	2.(d)	3.(a)	3.(b)	4.(a)	4.(b)	5.	6.
Cotações:	$1,5$	$2,0$	$2,0$	$2,0$	$1,0$	$1,5$	$1,5$	$1,5$	$1,5$	$1,5$	$2,0$	$2,0$

1. Considere a seguinte função:

$$g(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{e^3 \ln(x-1)}$$

   (a) Determine o domínio da função g;

   (b) Calcule, caso existam, as **assíntotas verticais** de g.

2. Considere a seguinte função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\ln x), & \text{se } x \geq 1 \\ x - 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

   (a) Verifique se a função f é contínua em $x = 1$;

   (b) Prove que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]e^{\pi}, e^{2\pi}[$;

   (c) Justifique que a função f não é diferenciável no ponto $x = 1$;

   (d) Determine a função derivada de f.

3. Considere a função:

$$h(x) = xe^{1-x}$$

   (a) Estude a **monotonia** e **a existência de extremos** de h;

   (b) Estude o sentido da **concavidade** da função h e determine, caso exitam, os seus **pontos de inflexão**.

V.S.F.F.

4. Considere as seguintes sucessões reais:

$$u_n = e\left(\frac{7n+3}{7n}\right)^n \quad ; \qquad v_n = \frac{2n+1}{n} \qquad ; \qquad w_n = \begin{cases} u_n, & \text{se } n > 2^3 \\ \\ v_n, & \text{se } n \leq 2^3 \end{cases}$$

(a) Estude a monotonia da sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

(b) Calcule, caso exista, o $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

5. Resolva, em $\mathbb{C}$, a seguinte equação:

$$z^2 + \left[-4\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}i\right] z = -3.$$

6. Represente no plano d' Argand o seguinte conjunto:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z-2| \leq 2 \ \wedge \ |z-1| \geq 1 \ \wedge \ -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{4}\right\}.$$

UNIVERSIDADE da MADEIRA

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR

MATEMÁTICA - 15/06/2016

RESOLUÇÃO

1.

$$g(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{e^3 \ln(x-1)}$$

(a) Domínio de g

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : 9 - x^2 \geq 0 \wedge x - 1 > 0 \wedge \ln(x-1) \neq 0\right\}$$

Cálculos Auxiliares

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &= 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3, \text{ logo } 9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ x - 1 &> 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ \ln(x-1) &\neq 0 \Leftrightarrow x - 1 \neq e^0 \Leftrightarrow x - 1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2 \end{aligned}$$

Logo

$$D_g =]1, 3] \setminus \{2\}$$

(b) Assíntotas verticais (A.V.) de g

Temos que g é contínua no seu domínio.

Estudo da existência de A.V. de g.

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{9-x^2}}{e^3 \ln(x-1)} = \frac{\sqrt{8}}{e^3 \ln(0^+)} = \frac{\sqrt{8}}{e^3(-\infty)} = 0 \in \mathbb{R},$$

logo $\nexists$ A.V. em $x = 1^+$.

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{9-x^2}}{e^3 \ln(x-1)} = \frac{\sqrt{5}}{e^3 \ln(1^-)} = \frac{\sqrt{5}}{e^3(0^-)} = -\infty \notin \mathbb{R},$$

logo $\exists$ A.V. em $x = 2^-$.

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{9-x^2}}{e^3 \ln(x-1)} = \frac{\sqrt{5}}{e^3 \ln(1^+)} = \frac{\sqrt{5}}{e^3(0^+)} = +\infty \notin \mathbb{R},$$

logo $\exists$ A.V. em $x = 2^+$.

Assim: $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g.

2.
$$f(x)=\begin{cases}\cos(\ln x), & \text{se } x\geq 1\\ x-1, & \text{se } x<1\end{cases}$$

(a) f é contínua em $x=1$ se, e só se,

$$\exists \lim_{x\to 1^-} f(x), \exists \lim_{x\to 1^+} f(x) \wedge \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \cos(\ln 1) = \cos 0 = 1$$

Temos
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x-1) = 0$$
e
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \cos(\ln x) = \cos(\ln 1) = \cos 0 = 1$$
Assim
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x),$$
donde f não é contínua em $x=1$.

(b) Para $x\in[e^{\pi},e^{2\pi}]$, $f(x)=\cos(\ln x)$, temos que f é contínua em $[e^{\pi},e^{2\pi}]$, por ser a composta de duas funções contínuas. Uma vez que
$$f(e^{\pi}) = \cos(\ln e^{\pi}) = \cos(\pi) = -1 < 0$$
e
$$f(e^{2\pi}) = \cos\left(\ln e^{2\pi}\right) = \cos(2\pi) = 1 > 0$$
Então, pelo Teorema de Bolzano, existe um zero da função f no intervalo $]e^{\pi},e^{2\pi}[$.

(c) Como a função f não é contínua no ponto $x=1$ (pela alínea (a)), então f não é diferenciável em $x=1$, ou seja, $\nexists f'(1)$.

(d) Função derivada de f

Para $x<1$ temos
$$f'(x) = (x-1)' = 1$$
Para $x>1$ temos
$$f'(x) = (\cos(\ln x))' = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)$$
Pela alínea (c) vimos que $\nexists f'(1)$, logo a função derivada de f é:

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\sin(\ln x), & \text{se } x>1\\ 1, & \text{se } x<1\end{cases}$$

3.
$$h(x) = xe^{1-x}$$

(a) **Monotonia** e **a existência de extremos** de h :
Derivada de h :

$$h'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$$

Zeros da 1^a derivada:

$$\begin{aligned} & h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & e^{1-x} = 0 \vee 1 - x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \end{aligned}$$

		1	
$1-x$	$+$	0	$-$
e^{1-x}	$+$	$+$	$+$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	max $_{(1,1)}$	$\searrow$

$\therefore$ h é crescente no intervalo $]-\infty, 1[$ e decrescente no intervalo $]1, +\infty[$;
h tem um máximo em $x = 1$ e o valor do máximo é: $h(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$

(b) **Concavidade** e **pontos de inflexão** da função h :
2^a derivada de h :

$$h''(x) = \left[e^{1-x}(1-x)\right]' = -(1-x)e^{1-x} - e^{1-x} = e^{1-x}(x-2)$$

Zeros da 2^a derivada:

$$\begin{aligned} & h''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & e^{1-x} = 0 \vee x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 2 \end{aligned}$$

		2	
$x-2$	$-$	0	$+$
e^{1-x}	$+$	$+$	$+$
$h''(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\cap$	ponto inflexão $_{(2,2e^{-1})}$	$\cup$

$\therefore$ h tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty, 2[$;

h tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]2, +\infty[$;

h tem um ponto de inflexão em $x = 2$ e a sua imagem é:

$$h(2) = 2e^{1-2} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

4.

$$u_n = e\left(\frac{7n+3}{7n}\right)^n \quad ; \qquad v_n = \frac{2n+1}{n} \qquad ; \qquad w_n = \begin{cases} u_n, & \text{se } n > 2^3 \\ v_n, & \text{se } n \leq 2^3 \end{cases}$$

(a) Monotonia da sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} = \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n} \\ &= \frac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Logo, a sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente.

(b) Como

$$w_n = \begin{cases} e\left(\frac{7n+3}{7n}\right)^n, & \text{se } n > 2^3 \\ \frac{2n+1}{n}, & \text{se } n \leq 2^3 \end{cases}$$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} w_n &= \lim_{n\to+\infty} e\left(\frac{7n+3}{7n}\right)^n = e \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{7n}\right)^n \\ &= e \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{3}{7}}{n}\right)^n = e.e^{\frac{3}{7}} = e^{\frac{10}{7}} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty} w_n = e^{\frac{10}{7}}$$

5. Temos:

$$
\begin{aligned}
& z^2+\left[-4\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}i\right]z=-3\\
\Leftrightarrow\ & z^2+\left[-4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+2\sqrt{2}i\right]z=-3\\
\Leftrightarrow\ & z^2+\left[-4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-4i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\sqrt{2}i\right]z=-3\\
\Leftrightarrow\ & z^2+\left(-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i\right)z+3=0\\
\Leftrightarrow\ & z^2-2\sqrt{2}z+3=0\\
\Leftrightarrow\ & z=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{8-12}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & z=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{-4}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & z=\frac{2\sqrt{2}\pm 2i}{2}\\
\Leftrightarrow\ & z=\sqrt{2}+i\vee z=\sqrt{2}-i
\end{aligned}
$$

6.

$$\left\{z\in\mathbb{C}:|z-2|\leq 2\ \wedge\ |z-1|\geq 1\ \wedge\ -\frac{\pi}{2}\leq\arg z\leq-\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Temos

$$
\begin{aligned}
& |z-2|\leq 2 \text{ é o círculo de centro } (2,0) \text{ e raio 2, pois}\\
\Leftrightarrow\ & |z-2|\leq 2\Leftrightarrow|x+yi-2|\leq 2\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2\leq 4
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
& |z-1|\geq 1 \text{ é o exterior do círculo de centro } (1,0) \text{ e raio 1, pois}\\
\Leftrightarrow\ & |x+yi-1|\geq 1\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2\geq 1
\end{aligned}
$$

Representação no plano d' Argand