UNIVERSIDADE da MADEIRA

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS

Matemática - 13/06/2019

Atenção: ***Justifique*** *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Não é permitido *o uso de* ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel****.*
A prova tem a duração de ***120 minutos****.*

Questão	1.(a)	1.(b)	1.(c)	2	3.(a)	3.(b)	3.(c)	3.(d)	4.(a)	4.(b)	4.(c)
Cotação	2.0	1.5	2.0	2.0	1.5	2.5	2.5	1.5	1.5	1.5	1.5

1. Considere os pontos $a = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $p = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $q = (1, 2)$.

   (a) Escreva a equação reduzida da reta r que passa pelos pontos p e q.

   (b) Determine a reta s perpendicular a r que passa pelo ponto a.

   (c) Determine a distância entre o ponto a e o ponto de interseção das retas s e r.

2. Considere um número real a e a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é definido por

$$u_n = \frac{2^n \cos(n\pi)}{a^n}.$$

   Diga para que valores de a a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

3. Considere a função definida para $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = xe^{1-x}$.

   (a) Calcule as assíntotas do gráfico de f, caso existam.

   (b) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de f.

   (c) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função f e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.

   (d) Esboce o gráfico e identifique o contradomínio da função f.

4. Numa caixa há 10 bolas, 6 amarelas e 4 brancas, indistinguíveis ao tato. Tiramos ao acaso uma bola da caixa, observamos a sua cor e voltamos a colocar a bola retirada na caixa, juntamente com duas novas bolas com a cor observada. Depois deste processo retiramos uma segunda bola da caixa. Qual a probabilidade de:

   (a) A segunda bola retirada ser amarela, sabendo que a primeira bola retirada foi branca?

   (b) As duas bolas retiradas serem brancas?

   (c) A segunda bola retirada ser amarela?

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS

Matemática - 13/06/2019

Uma possível resolução

1. Considere os pontos $a = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $p = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $q = (1, 2)$.

   (a) Escreva a equação reduzida da reta r que passa pelos pontos p e q.
   A equação reduzida da reta é dada na forma $y = mx + b$, onde m e b são, respetivamente, o declive da reta e a ordenada do ponto no qual a reta cruza o eixo Oy. Como a reta passa pelo ponto $q = (1, 2)$ sabemos que
   $$2 = m \times 1 + b$$
   i.e, $b = 2 - m$. Como, adicionalmente, a reta passa pelo ponto $p = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ temos
   $$-\frac{1}{2} = m\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 - m \Leftrightarrow -1 = -m + 4 - 2m \Leftrightarrow 3m = 5 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}$$
   de onde resulta que $b = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$. Conclui-se assim que a equação reduzida da reta r é $y = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$.

   (b) Determine a reta s perpendicular a r que passa pelo ponto a.
   O declive de uma reta perpendicular a uma reta r com equação reduzida $y = mx + b$ é dado por $-\frac{1}{m}$. Assim a reta s terá como equação reduzida $y = -\frac{3}{5}x + b$, onde b é a ordenada do ponto no qual a reta cruza o eixo Oy. Como a reta s passa pelo ponto a temos
   $$-\frac{2}{3} = -\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} + b \Leftrightarrow -\frac{2}{3} = -1 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}.$$
   Resulta assim que a reta s tem equação reduzida $y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}$.

   (c) Determine a distância entre o ponto a e o ponto de interseção das retas s e r.
   Para encontrar o ponto (x, y) de interseção das retas r e s necessitamos de encontrar a solução do seguinte sistema de equações:
   $$\begin{cases} y = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = 0 \end{cases}.$$

O ponto de interseção das retas r e s é o ponto $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

A distância deste ponto ao ponto a é

$$\begin{aligned}
d\left(\left(0, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right) &= \sqrt{\left(0 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 1^2} \\
&= \sqrt{\frac{25}{9} + 1} \\
&= \sqrt{\frac{34}{9}} \\
&= \frac{\sqrt{34}}{3}.
\end{aligned}$$

2. Considere um número real a e a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é definido por

$$u_n = \frac{2^n \cos(n\pi)}{a^n}.$$

Diga para que valores de a a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Quando n é um número par temos $\cos(n\pi) = 1$ e quando n é um número ímpar temos $\cos(n\pi) = -1$. Podemos então reescrever o termo geral da sucessão na forma

$$u_n = \frac{2^n(-1)^n}{a^n} = \left(-\frac{2}{a}\right)^n.$$

A sucessão é convergente quando, e só quando,

$$\left|-\frac{2}{a}\right| < 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{2}{a} = 1$$

i.e., quando, e só quando,

$$|a| > 2 \quad \text{ou} \quad a = -2 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -2] \cup (2, +\infty).$$

3. Considere a função definida para $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = xe^{1-x}$.

(a) Calcule as assíntotas do gráfico de f, caso existam.

O gráfico da função f não tem assíntotas verticais já que f resulta da composição de funções contínuas e tem por domínio o conjunto dos números reais. Relativamente às assíntotas horizontais, verificamos que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal à direita já que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = 0$$

Quando x converge para $-\infty$ temos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{1-x} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}=+\infty,$$

pelo que concluímos que não existe nenhuma assíntota à esquerda (oblíqua ou horizontal).

(b) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de f.

A derivada da função f é dada, para x real, por

$$f'(x)=\left(xe^{1-x}\right)'=x'e^{1-x}+x\left(e^{1-x}\right)'=e^{1-x}+x(-1)\left(e^{1-x}\right)=e^{1-x}(1-x).$$

Dado que a função exponencial é uma função positiva no seu domínio, a derivada da função f anula-se apenas no ponto $x=1$ pois

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)=0\Leftrightarrow x=1,$$

a função f é crescente quando $x<1$ já que

$$f'(x)>0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)>0\Leftrightarrow x<1,$$

e é decrescente quando $x>1$ já que

$$f'(x)<0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)<0\Leftrightarrow x>1.$$

Apresentando os resultados anteriores num quadro de estudo do sinal de f', considerando que $f(1)=1e^{1-1}=1$, obtemos:

		1	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	1	$\searrow$

Conclusão: f é crescente no intervalo $]-\infty,1[$, é decrescente no intervalo $]1,+\infty[$ e tem um único extremo, um máximo absoluto, em $x=1$, que vale 1.

(c) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função f e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.

A concavidade do gráfico da função f depende do sinal da segunda derivada da função f. Ora,

$$\begin{aligned} f''(x) &= [f'(x)]'=\left[e^{1-x}(1-x)\right]' \\ &= -e^{1-x}(1-x)+e^{1-x}(-1) \\ &= e^{1-x}(-1+x-1) \\ &= e^{1-x}(x-2). \end{aligned}$$

Como $e^{1-x}>0$, para todo o valor real x, o sinal de $f''(x)$ depende apenas do sinal de $x-2$. Temos

$$f''(x)=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2,$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow x-2>0\Leftrightarrow x>2\Leftrightarrow x\in\,]2,+\infty[$$

e

$$f''(x)<0\Leftrightarrow x-2<0\Leftrightarrow x<2\Leftrightarrow x\in\,]-\infty,2[$$

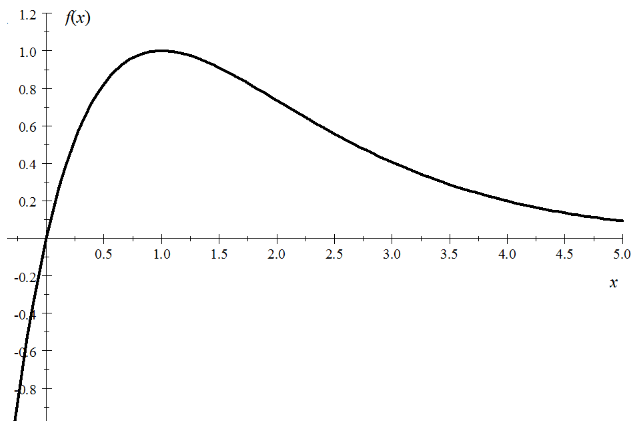
Apresentando os resultados anteriores num quadro de estudo do sinal de f'', considerando que $f(2) = 2e^{1-2} = 2e^{-1}$, obtemos:

		2	
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$2e^{-1}$	$\smile$

Concluímos assim que no intervalo $]2, +\infty[$, o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima e no intervalo $]-\infty, 2[$ o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo. Consequentemente, o gráfico de f tem um único ponto de inflexão: $(2, 2e^{-1})$.

(d) Esboce o gráfico e identifique o contradomínio da função f.

Considerando as alíneas anteriores, o gráfico de f tem o seguinte aspecto:



O contradomínio de f, que é o conjunto dos pontos y tais que $y = f(x)$, para algum x pertencente ao domínio de f, é o intervalo $]-\infty, 1]$.

4. Numa caixa há 10 bolas, 6 amarelas e 4 brancas, indistinguíveis ao tato. Tiramos ao acaso uma bola da caixa, observamos a sua cor e voltamos a colocar a bola retirada na caixa, juntamente com duas novas bolas com a cor observada. Depois deste processo retiramos uma segunda bola da caixa. Qual a probabilidade de:

(a) A segunda bola retirada ser amarela, sabendo que a primeira bola retirada foi branca?

Sendo a primeira bola retirada branca, a composição da caixa, após a observação da bola e a colocação das duas novas bolas, passa a ser de 12 bolas, sendo 6 amarelas e 6 brancas. Assim, a probabilidade de *a segunda bola retirada ser amarela* (A2), sabendo que a *primeira bola retirada foi branca* (B1) é

$$P(A2 \text{ dado que ocorreu } B1) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

(b) As duas bolas retiradas serem brancas?

Considere-se B2 o acontecimento *a segunda bola retirada ser branca*. A probabilidade pedida é

$$P(B1 \text{ e } B2) = P(B2 \text{ dado que ocorreu } B1)P(B1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{4}{10} = \frac{1}{2}\frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

(c) A segunda bola retirada ser amarela? Temos

$$P(A2) = P(A2 \text{ dado que ocorreu } A1)P(A1) + P(A2 \text{ dado que ocorreu } B1)P(B1)$$
$$= \frac{8}{12}\frac{6}{10} + \frac{1}{2}\frac{4}{10} = \frac{2}{3}\frac{3}{5} + \frac{2}{10} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$