UNIVERSIDADE da MADEIRA

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS

Matemática - 08/07/2020

Atenção: ***Justifique*** *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Não é permitido *o uso de* ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel****.*
A prova tem a duração de ***120 minutos****.*

Questão	1	2.(a)	2.(b)	3	4.(a)	4.(b)	4.(c)	4.(d)	5.	6.(a)	6.(b)
Cotação	2.0	2.0	1.5	2.0	1.5	2.5	2.5	1.5	1.5	1.5	1.5

1. Represente, geometricamente, no plano o conjunto dos pontos (x, y) tais que os vetores $(9x, 12, y)$ e $(x, -3x, 4y)$ sejam ortogonais.

2. Considere a sucessão definida, para $n \in \mathbb{N}$, por $a_n = \dfrac{3^n}{3^{n-1} + 2^n}$. Indique, justificando, se:

   (a) A sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$, é convergente.

   (b) A sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$, é limitada.

3. Verifique se é contínua em $x = 0$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x > 0 \\ e^{-x^2}, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.

4. Considere a seguinte função definida por $g(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$.

   (a) Calcule as assíntotas do gráfico de g, caso existam.

   (b) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de g.

   (c) Estude o sentido de concavidade do gráfico da função g e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.

   (d) Esboce o gráfico e identifique o contradomínio de g.

5. Segundo o Decreto-Lei n.º 2/2020, de 14 de janeiro, as novas matrículas passam a ser constituídas por dois grupos de duas letras e um grupo central de dois algarismos. Sabendo que a primeira chapa de matrícula da nova série (já atribuída) foi a "AA 01 AA" e que as letras Y, K, e W serão também usadas, determine o número de matrículas com esta nova configuração disponíveis para atribuição.

6. Lançam-se, simultaneamente, dois dados equilibrados, um verde e um azul.

   (a) Qual a probabilidade de o número marcado no dado verde ser o dobro do número marcado no dado azul?

   (b) Qual a probabilidade da soma dos dois números ser 5.

UNIVERSIDADE da MADEIRA

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS

Matemática - 08/07/2020

Uma resolução possível

Atenção: ***Justifique*** *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Não é permitido *o uso de* ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel****.*
A prova tem a duração de ***120 minutos****.*

Questão	1	2.(a)	2.(b)	3	4.(a)	4.(b)	4.(c)	4.(d)	5.	6.(a)	6.(b)
Cotação	2.0	2.0	1.5	2.0	1.5	2.5	2.5	1.5	1.5	1.5	1.5

1. Represente geometricamente, no plano cartesiano, o conjunto dos pontos (x, y) tais que os vetores $(9x, 12, y)$ e $(x, -3x, 4y)$ sejam ortogonais.
   R: Para que estes vetores sejam ortogonais entre si o seu produto interno terá de ser nulo. Ora, o produto interno destes vetores é dado por

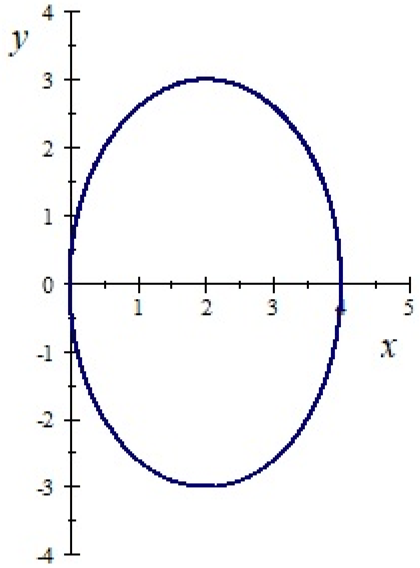
$$(9x, 12, y) \cdot (x, -3x, 4y) = 9x^2 - 36x + 4y^2$$

e

$$\begin{aligned}
(9x, 12, y) \cdot (x, -3x, 4y) &= 0 \Leftrightarrow \\
9x^2 - 36x + 4y^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
9\left(x^2 - 4x\right) + 4y^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
9\left(x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2 - 2^2\right) + 4y^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
9\left[(x-2)^2 - 4\right] + 4y^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
9(x-2)^2 - 36 + 4y^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
9(x-2)^2 + 4y^2 &= 36 \Leftrightarrow \\
\frac{9}{36}(x-2)^2 + \frac{4}{36}y^2 &= 1 \Leftrightarrow \\
\frac{1}{4}(x-2)^2 + \frac{1}{9}y^2 &= 1 \Leftrightarrow \\
\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} &= 1,
\end{aligned}$$

que é a equação de uma elipse que passa pelos pontos $(2, 3)$, $(2, -3)$, $(4, 0)$ e $(0, 0)$.

Graficamente,



2. Considere a sucessão definida, para $n \in \mathbb{N}$, por $a_n = \dfrac{3^n}{3^{n-1} + 2^n}$. Indique, justificando, se:

   (a) A sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$, é convergente.
   R: Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} a_n &= \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{3^{n-1} + 2^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{3^n}{3^n}}{\frac{3^{n-1}}{3^n} + \frac{2^n}{3^n}} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{3} + 0} = 3.
\end{aligned}$$

   Sim, a sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$, é convergente e o seu limite é 3.

   (b) A sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$, é limitada.
   R: Sabemos que toda a sucessão convergente é limitada, logo $a_n, n \in \mathbb{N}$, é limitada.

3. Verifique se é contínua em $x = 0$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x > 0 \\ e^{-x^2}, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.

   R: Para que f seja contínua em zero temos de ter

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

   Como a função está definida por expressões diferentes à esquerda e à direita de $x = 0$, isto significa que teremos de ter

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

   Ora,

$$f(0) = e^{-0^2} = e^0 = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{-x^2} = e^{-0^2} = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} x = 0,$$

a função $g(x) = x$ é um infinitésimo (quando $x \to 0$). Por outro lado, a função $h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ é uma função limitada. Como o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo, concluímos que

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0),$$

concluímos que a função f não é contínua em $x = 0$.

4. Considere a seguinte função definida, para $x \in \mathbb{R}$, por $g(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

   (a) Calcule as assíntotas do gráfico de g, caso existam.
   R: Por ser a composição de funções contínuas, a função g é contínua em $\mathbb{R}$ e, consequentemente, não tem assíntotas verticais. Por outro lado temos

   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)} = 0,$$

   de onde se conclui que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal, à direita e à esquerda, do gráfico de g, e que, consequentemente, não existem assíntotas oblíquas.

   (b) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de g.
   R: A função g é uma função racional e os seus intervalos de monotonia podem ser encontrados através do estudo do sinal da função derivada, g'. Ora,

   $$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\pi}(-1)\left(1+x^2\right)^{-2}\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right) \\ &= \frac{-1}{\pi\left(1+x^2\right)^2}(2x) = \frac{-2x}{\pi\left(1+x^2\right)^2}, \end{aligned}$$

   e

   $$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{\pi\left(1+x^2\right)^2} > 0 \Leftrightarrow -2x > 0$$

   pois $\pi\left(1+x^2\right)^2 > 0$, para qualquer número real x. Como

   $$-2x > 0 \Leftrightarrow x < 0,$$

   resulta assim que

   $$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

   De forma análoga concluímos que

   $$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

No ponto $x = 0$ a função g vale

$$g(0) = \frac{1}{\pi(1+0^2)} = \frac{1}{\pi}$$

e a função g' vale

$$g'(0) = \frac{-2\times 0}{\pi(1+0^2)^2} = 0.$$

Resumindo os resultados obtidos num quadro temos

		0	
g'	$+$	0	$-$
Monotonia de g	$\nearrow$	$\frac{1}{\pi}$	$\searrow$

,

i.e., a função g é crescente no intervalo $(-\infty, 0)$, decrescente em $(0, +\infty)$ e tem um máximo global em $x = 0$, sendo este igual a $\frac{1}{\pi}$.

(c) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função g e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.
R: Estudemos o sinal da função g''. Ora,

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{d^2}{dx^2}g(x) = \frac{d}{dx}g'(x) \\
&= \frac{d}{dx}\frac{-2x}{\pi(1+x^2)^2} = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{d}{dx}(-2x)(1+x^2)^2 - (-2x)\frac{d}{dx}(1+x^2)^2}{(1+x^2)^4} \\
&= \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)\,2(1+x^2)\,2x}{\pi(1+x^2)^4} \\
&= \frac{-2-2x^2+8x^2}{\pi(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{\pi(1+x^2)^3} = \frac{2}{\pi}\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}
\end{aligned}$$

e, dado que $\frac{2}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)^3}$ é positivo, independentemente do valor de x, o sinal de g'' depende do sinal de $3x^2-1$, que é a equação de uma parábola, com concavidade voltada para cima. Considerando que

$$3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

os zeros da parábola, e de g'', são $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Sabemos ainda que

$$g''(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

que

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e que

$$g\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)^3}\frac{1}{\pi\left(1+\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)} = \frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\pi\frac{4}{3}} = \frac{3}{4\pi}.$$

Resumindo,

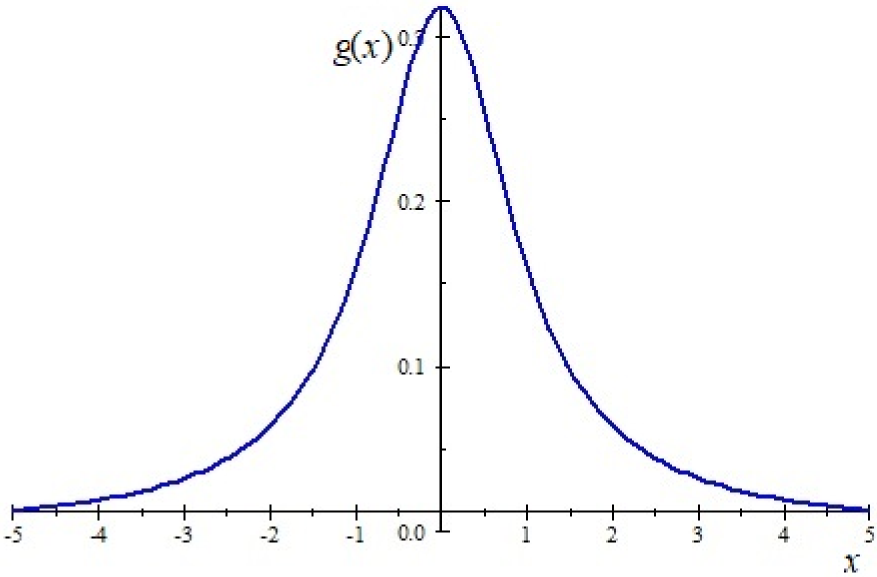
		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
g''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Conc. do gráfico de g	$\smile$	$\dfrac{3}{4\pi}$	$\frown$	$\dfrac{1}{\pi}$	$\frown$	$\dfrac{3}{4\pi}$	$\smile$

,

i.e., o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo no intervalo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, tem concavidade voltada para cima nos intervalos $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, e tem dois pontos de inflexão: $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(d) Esboce o gráfico e identifique o contradomínio de g.

R: Considerando as alíneas anteriores o gráfico de $g(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ tem o seguinte aspeto



O contradomínio de g, i.e., o conjunto das imagens de g é o intervalo $\left(0, \frac{1}{\pi}\right]$.

5. Segundo o Decreto-Lei n.º 2/2020, de 14 de janeiro, as novas matrículas passam a ser constituídas por dois grupos de duas letras e um grupo central de dois algarismos. Sabendo que a primeira chapa de matrícula da nova série (já atribuída) foi a "AA 01 AA" e que as letras K, W e Y serão também usadas, determine o número de matrículas com esta nova configuração disponíveis para atribuição.

R: As letras incluídas nas matrículas são retiradas do alfabeto que inclui as letras K, W e Y, logo existem 26 possibilidades para cada letra. Cada algarismo é retirado do conjunto $\{0, 1, .., 9\}$, existindo assim 10 possibilidades para cada um destes. Assim, o número de matrículas disponíveis (incluindo a matrícula "AA 00 AA", que não será atribuída) é

$$26^2 * 10^2 * 26^2.$$

Não incluindo a matrícula "AA 00 AA" temos

$$26^4 * 10^2 - 1$$

matrículas possíveis.

(Curiosidade: $26^4 * 10^2 - 1 = 45\,697\,599$.)

6. Jogam-se simultaneamente dois dados equilibrados, um verde e um azul.

   (a) Qual a probabilidade de o número marcado no dado verde ser o dobro do número marcado no dado azul?
   R: Se denotarmos por (x, y) o resultado do lançamento dos dois dados, sendo x o resultado do dado verde e y o resultado do dado azul, os pares (x, y) onde o número marcado no dado verde é o dobro do número marcado no dado azul são 3:
   $$(6,3)\,,(4,2)\,,(2,1)\,.$$
   Existem 6 resultados possíveis para cada um dos dados, havendo assim 36 pares possíveis: $(1,1), (1,2)\,, ..., (1,6)\,, (2,1)\,, ..., (6,6)$. Conclui-se assim que a probabilidade solicitada é
   $$\frac{\#\left\{(6,3)\,,(4,2)\,,(2,1)\right\}}{\#\left\{(1,1)\,,(1,2)\,, ..., (1,6)\,,(2,1)\,, ..., (6,6)\right\}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

   (b) Qual a probabilidade da soma dos dois números ser 5.
   R: Usando a notação apresentada na alínea anterior, existem 4 pares onde a soma é 5: $(1,4)\,,(2,3)\,,(3,2)\,,(4,1)\,.$ A probabilidade solicitada é então dada por
   $$\frac{\#\left\{(1,4)\,,(2,3)\,,(3,2)\,,(4,1)\right\}}{\#\left\{(1,1)\,,(1,2)\,, ..., (1,6)\,,(2,1)\,, ..., (6,6)\right\}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$