UNIVERSIDADE da MADEIRA

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS

Matemática - 27/05/2024

Atenção:
Justifique *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Não é permitido *o uso de* ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel*** *ou de* ***outros dispositivos*** *com recursos de comunicação ou acesso à Internet.*
A prova tem a duração de ***120 minutos****.*

Questão	1.(a)	1.(b)	2.	3.	4.	5.(a)	5.(b)	6.(a)	6.(b)	7.(a)	7.(b)
Cotação	1.5	2.0	2.0	2.0	2.0	3.0	2.5	1.0	1.5	1.0	1.5

1. Seja A o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação $y = x + 1$ e B o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 25$.
   (a) Determine os pontos da interseção do conjunto A com o conjunto B.
   (b) Represente graficamente a região que resulta da interseção das regiões definidas pelas inequações $y \leq x + 1$, $y \geq -4$ e $x^2 + y^2 \leq 25$. Os pontos de interseção das linhas que limitam a região deverão ser determinados.

2. Calcule o limite da sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{3n+2}{2n+1} + \cos\left(\dfrac{n\pi}{3n+5}\right)$.

3. Determine todos os valores reais de k para os quais a função definida por
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{se } x > 0 \\ x^2 + (k-1)^2, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{é contínua em } x = 0.$$

4. Determine a derivada da função definida por $f\,(x) = \operatorname{sen}(x^2)\, e^{3x+1} + \ln(x^2 + 1)$.

5. Considere a função definida para $x \in \mathbb{R}$ por $h\,(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$.
   (a) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de h.
   (b) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função h e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.

6. Um pião (ou dado) de totobola tem seis faces: três faces "1", uma face "X" e duas faces "2". Considerando o espaço de resultados $\Omega = \{1, X, 2\}$, calcule P(sair um "1") e P(sair um "2"):
   (a) Supondo o pião equilibrado.
   (b) Supondo que a face X tem o dobro da probabilidade de sair que qualquer das outras faces.

7. Um técnico oficial de contas sabe por experiência que nove em cada dez auditorias a empresas de determinado setor revelam irregularidades consideráveis.
   (a) Se o técnico fizer auditorias a um conjunto de cinco empresas, qual é a probabilidade de que encontre irregularidades em quatro empresas ou menos?
   (b) Qual é a probabilidade de que a quinta empresa examinada pelo técnico seja a primeira cujas contas não contêm irregularidades?

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS

Matemática - 27/05/2024

Uma resolução possível

Questão	1.(a)	1.(b)	2.	3.	4.	5.(a)	5.(b)	6.(a)	6.(b)	7.(a)	7.(b)
Cotação	1.5	2.0	2.0	2.0	2.0	3.0	2.5	1.0	1.5	1.0	1.5

1. Seja A o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação e $y = x + 1$ e B o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 25$.

   (a) Determine os pontos da interseção do conjunto A com o conjunto B.

   RES: Os pontos da interseção de A e B são os que satisfazem simultaneamente as equações $y = x + 1$ e $x^2 + y^2 = 25$. Resolvendo o sistema de equações, obtemos

$$\begin{cases} y = x+1 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x^2+(x+1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x^2+x^2+2x+1 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} y = x+1 \\ 2x^2+2x-24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x^2+x-12 = 0 \end{cases}$$

   Resolvendo a equação do segundo grau $x^2 + x - 12 = 0$ obtemos

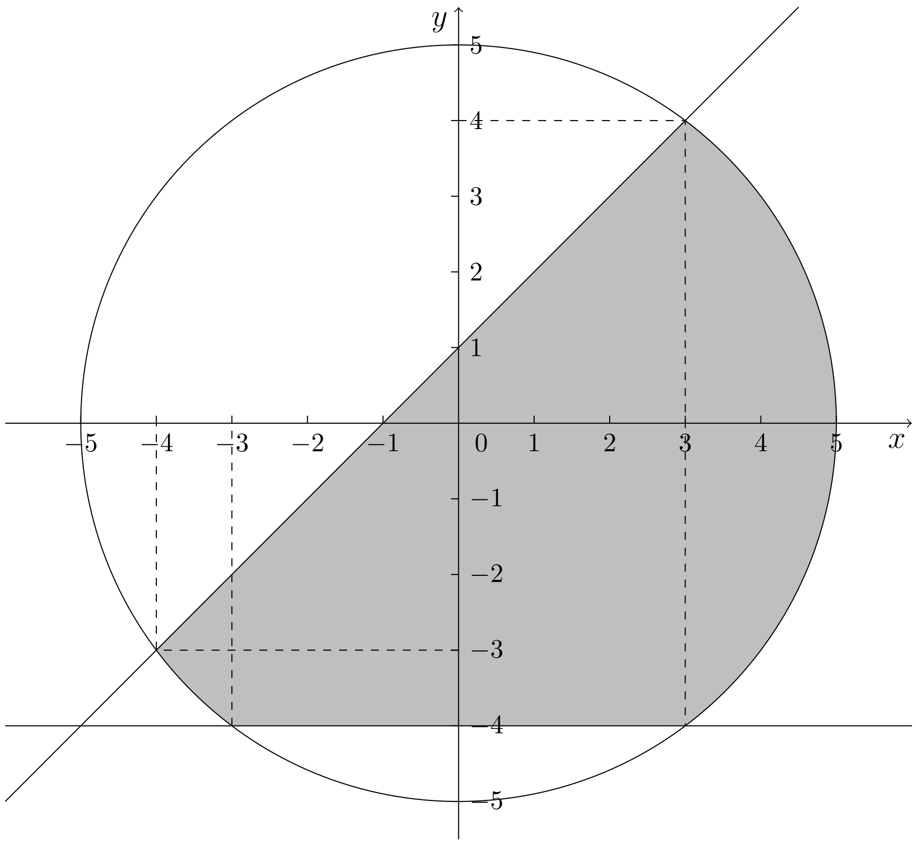
$$x^2+x-12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times(-12)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{-1-7}{2} = -4 \text{ ou } x = \frac{-1+7}{2} = 3$$

   Os pontos que estão na interseção do conjunto A com o conjunto B são os pontos $(-4, -3)$ e $(3, 4)$.

   (b) Represente graficamente a região que resulta da interseção das regiões definidas pelas inequações $y \leq x + 1$, $y \geq -4$ e $x^2 + y^2 \leq 25$. Os pontos de interseção das linhas que limitam a região deverão ser determinados.

   RES: Os pontos que satisfazem a inequação $y \leq x+1$ são os que se encontram abaixo da reta de equação $y = x + 1$, acima da reta com equação $y = -4$ e cuja distância â origem é menor ou igual a 5.

   Mostra-se facilmente que a reta de equação $y = -4$ corta a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$ nos pontos $(-3, -4)$ e $(3, -4)$. Esta região está representada na figura seguinte:



2. Calcule o limite da sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{3n+2}{2n+1} + \cos\left(\dfrac{n\pi}{3n+5}\right)$.

   RES: Temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+1} + \cos\left(\frac{n\pi}{3n+5}\right)\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} + \cos\left(\frac{n\pi}{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}\right)\right) = \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} + \cos\left(\frac{\pi}{3+\frac{5}{n}}\right)\right) = \\
&= \frac{3+0}{2+0} + \cos\left(\frac{\pi}{3+0}\right) = \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.
\end{aligned}$$

   A sucessão é convergente e o seu limite é 2.

3. Determine todos os valores reais de k para os quais a função
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{se } x > 0 \\ x^2 + (k-1)^2, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$
   é contínua em $x = 0$.

   RES: Para que a função g seja contínua em $x = 0$ é necessário (e suficiente) que

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0) = (k-1)^2.$$

   Ora,

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x^2 + (k-1)^2\right) = (k-1)^2$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Logo, g é uma função contínua se, e só se,

$$(k-1)^2 = 1 \Leftrightarrow k-1 = -1 \vee k-1 = 1 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2$$

4. Determine expressão da derivada da função definida por $f(x) = \mathrm{sen}(x^2)\, e^{3x+1} + \ln(x^2+1)$.

RES: Temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\mathrm{sen}\left(x^2\right) e^{3x+1} + \ln(x^2+1)\right)' = \left(\mathrm{sen}\left(x^2\right) e^{3x+1}\right)' + \left(\ln(x^2+1)\right)' = \\ &= \left(\mathrm{sen}\left(x^2\right)\right)' e^{3x+1} + \mathrm{sen}\left(x^2\right) \left(e^{3x+1}\right)' + \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \\ &= \left(x^2\right)' \cos\left(x^2\right) e^{3x+1} + \mathrm{sen}\left(x^2\right) 3e^{3x+1} + \frac{2x}{x^2+1} = \\ &= 2x\cos\left(x^2\right) e^{3x+1} + 3\mathrm{sen}\left(x^2\right) e^{3x+1} + \frac{2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

5. Considere a função definida para $x \in \mathbb{R}$ por $h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$.

   (a) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de h.

   RES: A derivada da função h para x real é dada por

   $$h'(x) = \left(x^3 - 3x^2 - 9x + 22\right)' = 3x^2 - 6x - 9$$

   Temos

   $$\begin{aligned} h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

   Uma vez que o gráfico da função derivada é uma parábola com a concavidade voltada para cima temos que f' é positiva no intervalo $]-\infty, -1[$ e no intervalo $]3, +\infty[$ e é negativa no intervalo $]-1, 3[$.

   Temos

   $$\begin{aligned} h(-1) &= (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 9 \times (-1) + 22 = -1 - 3 + 9 + 22 = 27 \\ h(3) &= 3^3 - 3 \times 3^2 - 9 \times 3 + 22 = 27 - 27 - 27 + 22 = -5 \end{aligned}$$

   Apresentando os resultados anteriores num quadro.

	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
h'	$+$	0	$-$	0	$+$
h	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$

   Conclui-se assim que h é crescente no intervalo $]-\infty, -1[$, decrescente no intervalo $]-1, 3[$, voltando a ser crescente no intervalo $]3, +\infty[$. A função tem um máximo local em $x = -1$, que vale 27 e um mínimo local em $x = 3$ valendo -5.

(b) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função h e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.

RES: A segunda derivada da função h para x real é dada por

$$h''(x) = \left(3x^2 - 6x - 9\right)' = 6x - 6$$

Resulta assim que a segunda derivada anula-se em $x = 1$, é negativa quando $x < 1$ e positiva quando $x > 1$.

Apresentando os resultados anteriores num quadro de estudo do sinal de h'', considerando que

$$h(1) = 1 - 3 - 9 + 22 = 11$$

obtemos

	$-\infty$	1	$+\infty$
h''	$-$	0	$+$
h	$\frown$	11	$\smile$

Concluímos assim que nos intervalos $]-\infty, 1[$ o gráfico da função tem concavidade voltada para baixo e que no intervalo $]1, +\infty[$ o gráfico da função tem concavidade voltada para cima. O gráfico de h tem um ponto de inflexão no ponto $(1, 11)$.

6. Um pião (ou dado) de totobola tem seis faces: três faces "1", uma face "X" e duas faces "2". Considerando o espaço de resultados $\Omega = \{1, X, 2\}$, calcule P(sair um "1") e P(sair um "2"):

(a) Supondo o pião equilibrado.

RES: $P(\{1\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(\{2\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $P(\{X\}) = \frac{1}{6}$.

(b) Supondo que a face X tem o dobro da probabilidade de sair que qualquer das outras faces.

RES: Considerando $p = P$(cada face com "1") $= P$(cada face com "2"), temos P(face com "X") $= P(\{X\}) = 2p$. Para que as probabilidades somem 1, é necessário que $3p + 2p + 2p = 1 \Leftrightarrow 7p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{7}$, logo $P(\{1\}) = \frac{3}{7}$ e $P(\{X\}) = P(\{2\}) = \frac{2}{7}$.

7. Um técnico oficial de contas sabe por experiência que nove em cada dez auditorias a empresas de determinado setor revelam irregularidades consideráveis.

(a) Se o técnico fizer auditorias a um conjunto de cinco empresas, qual é a probabilidade de que encontre irregularidades em quatro empresas ou menos?

RES: Seja X =número de empresas com irregularidades num conjunto de cinco. Então $P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - 0.9^5 = 1 - 0.59049 = 0.40951$.

(b) Qual é a probabilidade de que a quinta empresa examinada pelo técnico seja a primeira cujas contas não contêm irregularidades?

RES: Sejam $S_i = \{$As contas da i-ésima empresa a ser examinada têm irregularidades$\}$ e $\bar{S}_i = \{$As contas da i-ésima empresa a ser examinada não têm irregularidades$\}$. Então a probabilidade pedida é $P(S_1 S_2 S_3 S_4 \bar{S}_5) = 0.9^4 \times 0.1 = 0.6561 \times 0,1 = 0.06561$.