

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA
ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS

Matemática - 26/05/2025

Atenção: *Justifique os raciocínios utilizados na resolução das questões.
Não é permitido o uso de **calculadora** nem de **telemóvel** ou
de **outros dispositivos** com recursos de comunicação ou acesso à Internet.
A prova tem a duração de **120 minutos**.*

Questão	1.(a)	1.(b)	2.	3.	4.(a)	4.(b)	5.(a)	5.(b)	6.	7.(a)	7.(b)
Cotação	2.0	1.5	1.5	2.0	2.0	2.0	2.0	3.0	1.5	1.5	1.0

- Considere, em \mathbb{R}^2 , a curva definida pela equação $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ e a reta de equação $4y - 3x = 12$.
 - Determine os pontos da interseção da curva com a reta.
 - Represente graficamente a região que resulta da interseção das regiões definidas pelas inequações $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 1$ e $4y - 3x < 12$.
- Calcule o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{4n + 3}{n^2 + 2} + \cos\left(\frac{4n\pi + 5}{3n}\right)$.
- Determine todos os valores reais de k para os quais a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \frac{1 - e^{4x}}{1 - e^x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
 é contínua em $x = 0$.
- Seja g a função real, de variável real, definida por $g(x) = \text{sen}(e^{x-1} - 1) + \frac{x}{x-1}$.
 - Determine o domínio da função g e estude a existência de assíntotas verticais.
 - Determine a expressão da derivada de g .
- Considere a função definida para $x \in \mathbb{R}$ por $h(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.
 - Determine os zeros da função h .
 - Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de h .
- Calcule a probabilidade de obter só uma cara em dois lançamentos e probabilidade de obter só duas caras em quatro lançamentos de uma moeda equilibrada. Compare os resultados obtidos.
- Uma roleta tem 8 sectores com as pontuações: 100, 80, 20, 10, 0, -30, -80 e -100. A probabilidade de obter zero é dupla da de cada sector positivo e tripla da de cada sector negativo. Calcule a probabilidade de obter, numa jogada:
 - 100 pontos;
 - Pontuação positiva.

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA
ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS

Matemática - 26/05/2025

Atenção: **Justifique** os raciocínios utilizados na resolução das questões.
Não é permitido o uso de **calculadora** nem de **telemóvel** ou de **outros dispositivos** com recursos de comunicação ou acesso à Internet.
A prova tem a duração de **120 minutos**.

Uma resolução

Questão	1.(a)	1.(b)	2.	3.	4.(a)	4.(b)	5.(a)	5.(b)	6.	7.(a)	7.(b)
Cotação	2.0	1.5	1.5	2.0	2.0	2.0	2.0	3.0	1.5	1.5	1.0

1. Considere, em \mathbb{R}^2 , a curva definida pela equação $(\frac{x}{4})^2 + (\frac{y}{3})^2 = 1$ e a reta de equação $4y - 3x = 12$.

(a) Determine os pontos da interseção da curva com a reta.

RES: Temos $4y - 3x = 12 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + 3$.

Substituindo y na equação da curva obtemos:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{4} + 1\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{16} + \frac{x}{2} + 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x + 4) = 0.$$

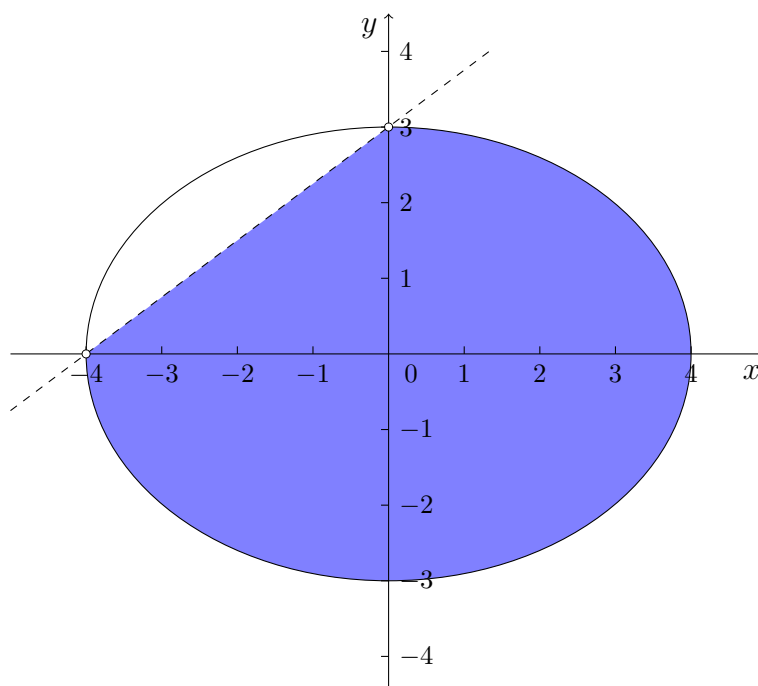
Cujas soluções são $x = 0$ ou $x = -4$.

Substituindo na reta, se $x = 0$, então $y = 3$ e se $x = -4$ então $y = 0$.

Os pontos de interseção são $(0, 3)$ e $(-4, 0)$.

(b) Represente graficamente a região que resulta da interseção das regiões definidas pelas inequações $(\frac{x}{4})^2 + (\frac{y}{3})^2 \leq 1$ e $4y - 3x < 12$.

RES:



2. Calcule o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{4n+3}{n^2+2} + \cos\left(\frac{4n\pi+5}{3n}\right)$.

RES:
$$\lim u_n = \lim \frac{4n+3}{n^2+2} + \lim \cos\left(\frac{4n\pi+5}{3n}\right) = \lim \frac{4+\frac{3}{n}}{n+\frac{2}{n}} + \cos\left(\lim \frac{4n\pi+5}{3n}\right) =$$

$$\frac{4+0}{+\infty+0} + \cos\left(\frac{4}{3}\pi + \lim \frac{5}{3n}\right) = 0 + \cos\left(\frac{4}{3}\pi + 0\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

3. Determine todos os valores reais de k para os quais a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \frac{1-e^{4x}}{1-e^x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{é contínua em } x = 0.$$

RES: A função f é contínua em $x = 0$ se existir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$.

Temos
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(k \frac{1-e^{4x}}{1-e^x} \right) = k \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-e^{4x}}{1-e^x} \right) =$$

$$4k \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{e^{4x}-1}{4x}}{\frac{e^x-1}{x}} \right) = 4k \frac{1}{1} = 4k.$$

Este limite também pode ser calculado usando a regra de Cauchy, porque temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Logo f é contínua quando $4k = 1$, ou seja, quando $k = \frac{1}{4}$.

4. Seja g a função real, de variável real, definida por $g(x) = \text{sen}(e^{x-1} - 1) + \frac{x}{x-1}$.

(a) Determine o domínio da função g e estude a existência de assíntotas verticais.

RES: O domínio de g é $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

A função é contínua no seu domínio. Mas pode ter assíntota vertical em $x = 1$. Temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\text{sen}(e^{x-1} - 1) + \frac{x}{x-1} \right) = \text{sen}(e^0 - 1) + \frac{1}{1^- - 1} = \text{sen}(0) + \frac{1}{0^-} = 0 - \infty = -\infty.$$

De modo análogo se mostra que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\text{sen}(e^{x-1} - 1) + \frac{x}{x-1} \right) = +\infty$.

Portanto, g tem uma assíntota vertical de equação $x = 1$.

(b) Determine a expressão da derivada de g .

RES:
$$g'(x) = (\text{sen}(e^{x-1} - 1))' + \left(\frac{x}{x-1} \right)' = e^{x-1} \cos(e^{x-1} - 1) + \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} =$$

$$e^{x-1} \cos(e^{x-1} - 1) - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

5. Considere a função definida para $x \in \mathbb{R}$ por $h(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

(a) Determine os zeros da função h .

RES:
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

A função anula-se em $x = 0$ e em $x = 2$.

(b) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de h .

RES: Temos $h'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2.$$

Fatorizando $h'(x) = 4x(x - 1)(x - 2)$. Para estudar o sinal da derivada de h , podemos fazer um quadro de sinal:

	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$4x$	-	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
h'	-	0	+	0	-	0	+
h	\searrow	(0, 0)	\nearrow	(1, 1)	\searrow	(2, 0)	\nearrow

A função h é decrescente nos intervalos $]-\infty, 0]$ e $[1, 2]$. A função é crescente nos intervalos $[0, 1]$ e $[2, +\infty[$. Tem mínimo absoluto em $x = 0$ e em $x = 2$, o valor deste mínimo é 0. Tem um máximo relativo em $x = 1$ e o valor deste máximo é 1.

6. Calcule a probabilidade de obter só uma cara em dois lançamentos e probabilidade de obter só duas caras em quatro lançamentos de uma moeda equilibrada. Compare os resultados obtidos.

RES: Para obter só uma cara em dois lançamentos, o espaço de acontecimentos tem quatro elementos com a mesma probabilidade, sendo dois deles favoráveis. Pelo que a probabilidade de obter só uma cara em dois lançamentos é:

$$P(1 \text{ cara em 2 lançamentos}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Para obter duas caras em quatro lançamentos, o espaço de acontecimentos tem 16 elementos, sendo 6 deles favoráveis. A probabilidade de obter duas caras em quatro lançamentos é

$$P(2 \text{ caras em 4 lançamentos}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Temos $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$, a probabilidade de obter uma moeda em dois lançamentos é maior do que a de obter duas moedas em quatro lançamentos.

7. Uma roleta tem 8 sectores com as pontuações: 100, 80, 20, 10, 0, -30, -80 e -100. A probabilidade de obter zero é dupla da de cada sector positivo e tripla da de cada sector negativo.

Calcule a probabilidade de obter, numa jogada:

(a) 100 pontos;

RES: Seja $p = P(0)$ a probabilidade de obter zero.

Temos $P(100) = P(80) = P(20) = P(10) = \frac{p}{2}$ e $P(-30) = P(-80) = P(-100) = \frac{p}{3}$. De $P(100) + P(80) + P(20) + P(10) + P(0) + P(-30) + P(-80) + P(-100) = 1$ obtemos

$$4\frac{p}{2} + p + 3\frac{p}{3} = 1 \Leftrightarrow 4p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}.$$

A probabilidade de obter 100 é $\frac{p}{2} = \frac{1}{8}$.

(b) Pontuação positiva.

RES: A probabilidade de obter pontuação positiva é $P(100) + P(80) + P(20) + P(10) = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.