

Acesso de Maiores de 23 anos
Prova escrita de Matemática

28 de Junho de 2012

Duração da prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

Primeira Parte

As oito questões desta primeira parte são de escolha múltipla. Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta. Escreva na folha de resposta a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão. Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível. Não apresente cálculos.

1. No lançamento de dois dados qual é a probabilidade da soma dos pontos ser 10?

- A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{1}{36}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{10}{36}$

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma determinada experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes
- $P(\bar{A}) = 0.2$
- $P(B) = 0.1$

Qual o valor de $P(A \cup B)$?

- A) 0.82 B) 0.9 C) 0.3 D) 0.28

3. Considere dez pontos do plano escolhidos de forma que não haja, entre os dez pontos, três que sejam colineares. Quantos triângulos diferentes podemos definir com estes pontos?

- A) 720 B) 30 C) 27 D) 120

4. Considere a função real, de variável real, definida por $\varphi(x) = \text{sen}(\cos(x))$. A expressão de $\varphi'(x)$ é igual a

- A) $\cos(\cos(x))$ C) $(\cos(x))^2$
B) $-\text{sen}(x) \cos(\cos(x))$ D) $-\text{sen}(x) (\cos(x))^2$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

9. Considere os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \frac{-4 + 8i}{1 + i}$.

- Resolva a equação $z^3 = z_1^3 + z_2$, sem recorrer à calculadora. Apresente os resultados na forma trigonométrica.
- Calcule $|z_1 + z_2|$.

10. Uma aposta simples do concurso Euromilhões consiste em inscrever cinco números do conjunto $N = \{1, 2, \dots, 50\}$ e duas estrelas do conjunto $E = \{1, 2, \dots, 11\}$ num boletim de apostas. Em cada concurso são sorteados cinco números do conjunto N e duas estrelas do conjunto E , ganhando o 1º Prémio qualquer aposta que contenha estes números e estas estrelas. Qual a probabilidade de um apostador ganhar um 1º Prémio com uma aposta simples?

11. Consideremos o conjunto $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F\}$. Formamos sequências com todas as letras do conjunto \mathcal{P} , sem repetições. Quantas destas sequências diferentes podemos formar que têm:

- a letra A em primeiro lugar?
- a letra A em primeiro lugar ou a letra F em último?
- as letras A, B juntas em qualquer ordem?
- a letra E em qualquer lugar exceto no último?

12. Seja $a \in \mathbb{R}$. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x + a), & \text{se } x < 0 \\ x + \ln(x + 1), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- Determine a de modo que f seja contínua em $x = 0$.
- Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x = 1$.

13. Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = 3x - e^{-x} - 2.$$

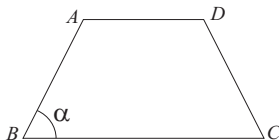
- Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que g tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo $]0, 1[$.
- Mostre que g tem um único zero em \mathbb{R} .
- Determine as assíntotas de g .

14. O quadrilátero $[ABCD]$ da figura é um trapézio isósceles, sendo $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD} = 1$ e $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

a) Mostre que $\overline{BC} = 1 + 2 \cos(\alpha)$.

b) Nas condições da figura, entre que valores poderá variar \overline{BC} ?

c) Mostre que para cada $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, a área do trapézio é igual a $\sin(\alpha) + \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$.



15. Um objeto é lançado ao ar, a partir do solo. A função

$$h(t) = 4t - t^2$$

representa a altura (medida em metros) a que o objeto se encontra no instante t (medido em segundos). Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, calcule

a) a altura máxima que o objeto atinge;

b) o instante $t > 0$ em que o objeto atinge novamente o solo.

Cotações

Primeira parte	40
Cada resposta certa	5
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Segunda parte	160
9	20
9. a)	15
9. b)	5
10	15
11	30
11. a)	5
11. b)	10
11. c)	10
11. d)	5
12	20
12. a)	10
12. b)	10
13	30
13. a)	10
13. b)	10
13. c)	10
14	25
14. a)	10
14. b)	5
14. c)	10
15	20
15. a)	10
15. b)	10
Total	200

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$
(r – raio)

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \cong 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \cong 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \cong 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$