FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Acesso de Maiores de 23 anos

Prova escrita de Matemática

17 de Junho de 2013

Duração da prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

Primeira Parte

As oito questões desta primeira parte são de escolha múltipla. Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta. Escreva na folha de resposta a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão. Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível. Não apresente cálculos.

1. Temos duas caixas com bolas brancas e bolas pretas. A primeira contém 4 bolas brancas e 3 bolas pretas. A segunda contém 3 bolas brancas e 5 bolas pretas. Uma bola é retirada da primeira caixa e colocada na segunda caixa. Qual a probabilidade de, tirando uma bola ao acaso da segunda caixa, sair uma bola preta?

   A) $\frac{4}{7} \times \frac{5}{9} + \frac{3}{7} \times \frac{6}{9}$ B) $\frac{4}{7} \times \frac{5}{8} + \frac{3}{7} \times \frac{6}{8}$ C) $\frac{4}{7} \times \frac{5}{9}$ D) $\frac{3}{7} \times \frac{6}{8}$

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma determinada experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:

   - $P(\overline{B}) = 0.6$
   - $P(A \cap B) = 0.2$
   - $P(A \cup B) = 0.7$

   Qual o valor de $P(B|A)$?

   A) $\frac{2}{3}$ B) 0.4 C) 0.3 D) 0.2

3. Considere a função real f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 16$. No gráfico desta função consideram-se os pontos de abcissas -6, -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5 e 6. Escolhem-se ao acaso dois desses 9 pontos e desenha-se o segmento de recta que tem por extremidades esses dois pontos. Qual é a probabilidade de esse segmento de recta intersectar o eixo das abcissas?

   A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{20}{81}$

4. Considere as funções, de domínio $[0, +\infty[$, definidas por $f(x) = \ln(3x + 2)$ e $g(x) = 3^x + \sin(x)$.
Considere as duas proposições:
I - o teorema de Bolzano permite afirmar que a equação $f(x) = 1$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]0, 1[$;
II - o teorema de Bolzano permite afirmar que a equação $g(x) = 7$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]2, 3[$.
Qual das seguintes afirmações está certa?

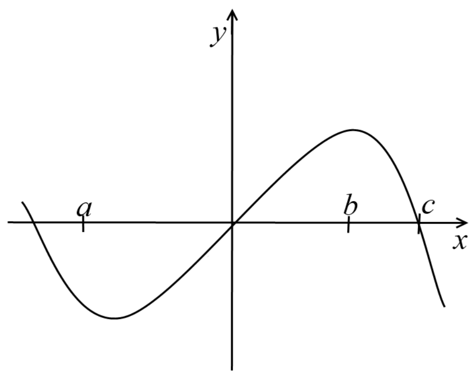
A) I é verdadeira e II é falsa

B) I é falsa e II é verdadeira

C) I e II são ambas falsas

D) I e II são ambas verdadeiras

5. A figura



representa parte do gráfico de uma função f, real de variável real. f' e f'' são, respetivamente, a primeira e a segunda derivada de f. Qual das seguintes afirmações pode ser verdadeira?

A) $f'(a) \times f''(b) < 0$

B) $f'(a) \times f'(c) < 0$

C) $f(b) \times f''(b) < 0$

D) $f(a) \times f'(a) < 0$

6. Sejam f e g funções de domínio $]0, +\infty[$. Sabe-se que:

- a reta de equação $y = 2\,x + 1$ é assíntota do gráfico de f;
- f não tem zeros;
- $g(x) = \dfrac{3\,x - e^{-x} + 2}{f(x)}$.

Qual das opções seguintes define uma assíntota do gráfico de g?

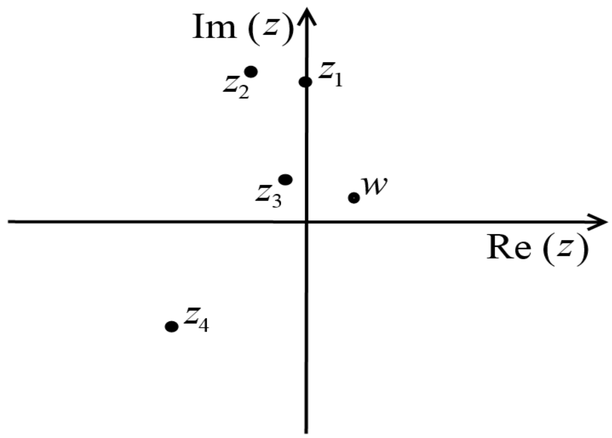
A) $y = \dfrac{3}{2}x$

B) $y = \dfrac{3}{2}x + 1$

C) $y = \dfrac{3}{2}$

D) $y = 1$

7. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4.



Qual o número complexo que pode ser igual a $w \times 3i$?

A) z_1 B) z_2 C) z_3 D) z_4

8. Se $z_1 = \dfrac{1+3i}{2+i}$ e $z_2 = \left(\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^3$, então $\overline{z}_1 \times z_2$ é igual a:

A) $-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}\,i$ C) $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ D) $2\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

9. Considere os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \dfrac{7 - i}{3 + i}$.

   a) Resolva a equação $z^4 = z_1^3 + z_2$, sem recorrer à calculadora. Apresente os resultados na forma trigonométrica.

   b) Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_1 e que passa na imagem geométrica de z_2.

10. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada por

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	a^2	a	b	b	b

    Sabendo que

    - a e b são números reais,
    - o valor médio da variável aleatória X é 2,

    qual o valor de a?

11. Considere todos os números de 5 algarismos que se podem obter a partir de todas as possíveis permutações dos algarismos 1, 2, 4, 6 e 8. Sabendo que esses números estão **ordenados** por ordem crescente indique:

    a) qual é a posição que ocupa o algarismo 62418?

    b) qual é o número que está na 67ª posição.

12. Seja f a função real definida por $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.

    a) Determine analiticamente:

       i. O seu domínio.

       ii. As coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados.

    b) Calcule $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e interprete os resultados obtidos.

13. Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = x\, e^{-x}.$$

    a) Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que g tem um único extremo relativo.

    b) Determine as assíntotas de g.

    c) Mostre que o extremo relativo de g é, de facto, extremo absoluto.

14. O quadrilátero $[ABCD]$ da figura é um trapézio retângulo. Sabe-se que

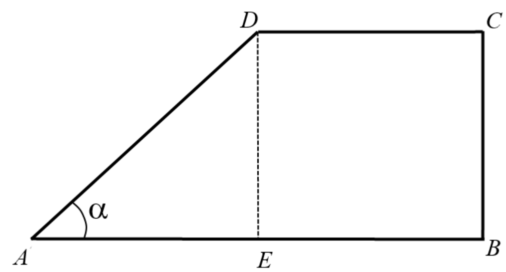
- $\overline{CD} = \overline{AE} = \overline{BE} = 1$,
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo BAD,
- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Mostre que o perímetro do trapézio retângulo é dado, em função de α, por

$$P(\alpha) = 3 + \frac{1 + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

b) Mostre que a área do trapézio retângulo é dada, em função de α, por

$$A(\alpha) = \frac{3}{2}\text{tg}(\alpha).$$



15. A população de coelhos selvagens, numa determinada região, t meses após o instante inicial, é dada, aproximadamente, por $P(t) = a + b \times \sin\left(\frac{\pi\, t}{6}\right)$.

a) Determine a e b sabendo que, no instante inicial, a população é de 10^5 elementos e que ao fim de 3 meses há 110 000 elementos na população.

b) Estude a função P, quanto à monotonia.

c) Para que valores de t a população é máxima?

Cotações

Primeira parte	40
Cada resposta certa	5
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Segunda parte	160
9	20
9. a)	10
9. b)	10
10	20
11	25
11. a)	15
11. b)	10
12	25
12. a) i.	5
12. a) ii.	10
12. b)	10
13	30
13. a)	10
13. b)	10
13. c)	10
14	15
14. a)	10
14. b)	5
15	25
15. a)	5
15. b)	10
15. c)	10
Total	200

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (*α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro × Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (*α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(*r – raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = \mathrm{x}_1\, \mathrm{p}_1 + \cdots + \mathrm{x}_n\, \mathrm{p}_n$

$\sigma = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mu)^2\, \mathrm{p}_1 + \cdots + (\mathrm{x}_n - \mu)^2\, \mathrm{p}_n}$

Se X é N(μ, σ), então:

$\mathrm{P}(\mu - \sigma < \mathrm{X} < \mu + \sigma) \approxeq 0{,}6827$

$\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < \mathrm{X} < \mu + 2\sigma) \approxeq 0{,}9545$

$\mathrm{P}(\mu - 3\sigma < \mathrm{X} < \mu + 3\sigma) \approxeq 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$