FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Acesso ao Ensino Superior de Estudantes Maiores de 23 Anos
Prova de **Matemática** – 15 de Junho de 2020
Duração: 2 horas + 30 minutos de tolerância

O candidato, ao resolver esta prova, compromete-se a não recorrer a qualquer tipo de consulta.
Esta prova é constituída por 6 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.
Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.
A resolução deve ser efectuada a esferográfica, em folhas brancas sem linhas, e cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

[1,5] **1.** (a) Um código JUNHO15 consiste numa sequência de cinco caracteres em que cada caracter é a letra `A`, `B`, `C` ou `D`. Por exemplo, `DAAAB` e `DAADA` são códigos JUNHO15. Determine o número de códigos JUNHO15 que utilizam simultaneamente as quatro letras `A`, `B`, `C` e `D`.

[1,5] (b) Sendo $n \in \mathbb{N}$, representemos o "*número de combinações de n elementos p a p*" por $\binom{n}{p}$. Determine n tal que $\binom{n-1}{3} \cdot (n-2)! = \binom{5}{4} \cdot (n-1)!$.

(*Note que:* $\sqrt{121} = 11$.)

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{2-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x^2-4}$.

[2,0] (b) $\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{x} - 7\right) \geq 0$.

[1,5] **3.** (a) Mostre, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$\sum_{k=0}^{n}(1+2k) = (1+n)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[1,5] (b) É sabido que, para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}$, se tem $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$.
Utilize este resultado para deduzir uma expressão análoga para

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q \qquad \text{e} \qquad \cos p + \cos q \ .$$

4. Determine, caso existam, os seguintes limites de sucessões:

[1,5] (a) $\lim \dfrac{5^n + 4^n}{2 \times 5^{n+1} + 1}$.

[1,5] (b) $\lim \left(\dfrac{n-5}{n+2}\right)^{n+3}$.

(*Recorde que:* $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.)

(Continua)

Cotações

5. Considere a função f, real de variável real, definida $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.

[2,0] (a) Indique o domínio de f e determine a derivada de f.

[2,0] (b) Determine os intervalos de monotonia da função f e estude a existência de extremos.

[1,5] **6.** (a) Considere o número complexo $w = 2\,\mathrm{cis}\,\dfrac{\pi}{3}$. Escreva o número complexo w^4 na forma trigonométrica e na forma algébrica.

[1,5] (b) Represente geometricamente (diagrama de *Argand*) o conjunto dos pontos definido pelas imagens dos números complexos z tais que

$$|z-3-4i| < 4 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}(z) = 4 \ .$$

($\mathrm{Im}(z)$ representa o coeficiente da parte imaginária de z.)

Fim