NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY
Departamento de Matemática

Acesso ao Ensino Superior de Estudantes Maiores de 23 Anos
Prova de **Matemática** – 24 de Junho de 2021
Duração: 2 horas

O candidato, ao resolver esta prova, compromete-se a não recorrer a qualquer tipo de consulta.
Esta prova é constituída por 5 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.
Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.
A resolução deve ser efectuada a esferográfica, em folhas brancas sem linhas, e cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

[2,0] **1.** (a) Um código JUNHO24 consiste numa sequência de seis caracteres em que cada caracter é a letra `A`, `B`, `C` ou `D`. Por exemplo, `DCAABA` e `DAAADA` são códigos JUNHO24. Determine o número de códigos JUNHO24 em que ocorrem apenas duas letras distintas.

[2,0] (b) Considere um conjunto de animais constituído por seis cães e seis gatos. Determine o número de grupos que se podem formar com estes animais, de forma a que cada grupo tenha cinco animais e pelo menos três destes animais sejam cães.

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{18x} \geq \left(\dfrac{1}{25}\right)^{3x^2}$.

[2,0] (b) $\log_{\frac{1}{7}}\left(1 - \dfrac{16}{x^2 - 9}\right) \geq 0$.

3. Pretende-se calcular o limite da sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{4^n} \times \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right)^{4^n}$.

[2,0] (a) Mostre, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[2,0] (b) Utilize o resultado expresso na alínea anterior para determinar $\lim u_n$.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = 5 + \ln\left(\dfrac{1-3x}{2-4x}\right)$.

[1,5] (a) Determine o domínio de f.

[1,5] (b) Determine a derivada de f e estude f quanto à monotonia.
(Na sua resposta apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.)

[2,0] (c) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

[3,0] **5.** Sejam $I_1, \ldots, I_n$, com $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, intervalos abertos limitados tais que $I_1 \cap \cdots \cap I_n \neq \emptyset$. Utilize o princípio de indução matemática para mostrar que $I_1 \cup \cdots \cup I_n$ é um intervalo aberto limitado.

Fim

(Formulário no verso desta folha)

Formulário

- $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

- Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) com razão r:

  Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

  Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

- Regras de derivação:
  $(u+v)' = u' + v'$; $\quad (uv)' = u'v + uv'$; $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $\quad (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$;
  $(\operatorname{sen} u)' = u'\cos u$; $\quad (\cos u)' = -u'\operatorname{sen} u$; $\quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
  $(e^u)' = u'e^u$; $\quad (a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$;
  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $\quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$