NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

Departamento de Matemática

Acesso ao Ensino Superior de Estudantes Maiores de 23 Anos
Prova de **Matemática** – 23 de Junho de 2022
Duração: 2 horas

O candidato, ao resolver esta prova, compromete-se a não recorrer a qualquer tipo de consulta.
Esta prova é constituída por 5 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.
Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.
A resolução deve ser efectuada a esferográfica, em folhas brancas sem linhas, e cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

[2,0] **1.** (a) Um código JUNHO23 consiste numa sequência de cinco caracteres em que cada caracter é uma letra do conjunto $\{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}\}$. Determine o número de códigos JUNHO23 em que a mesma letra ocorre exactamente três vezes. (Por exemplo, `DAAAB` e `DAADA` são dois códigos JUNHO23 nas condições pedidas.)

[2,0] (b) Quatro cães e três gatos vão sair, um de cada vez, de uma clínica veterinária. De quantas maneiras diferentes podem estes animais sair da clínica, sabendo que os cães saem consecutivamente?

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $\left(\frac{1}{16}\right)^x \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{-3+x^2}$.

[2,0] (b) $\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{-x}-1\right) \geq 0$.

3. Determine, caso existam, os seguintes limites de sucessões:

[2,0] (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{8^n}\left(\frac{8n}{n+1}\right)^n$.

[2,0] (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+3}{n+7}\right)^{5n+8}$.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} -2x^3 + e^{1-x^2}, & x \leq 1 \\ \dfrac{\ln(2-x)}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$.

[2,0] (a) Determine o domínio de f. Apresente o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

[2,0] (b) Estude a continuidade da função f em $x = 1$.

[2,0] (c) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $a = -1$.

[2,0] **5.** Mostre, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$\sum_{k=n}^{2n} k = \frac{3n(n+1)}{2}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fim

(Formulário no verso desta folha)

Formulário

- $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
- Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) com razão r:

  Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

  Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

- Regras de derivação:
  $(u+v)' = u' + v'$; $\quad (uv)' = u'v + uv'$; $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $\quad (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$;
  $(\operatorname{sen} u)' = u'\cos u$; $\quad (\cos u)' = -u'\operatorname{sen} u$; $\quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
  $(e^u)' = u'e^u$; $\quad (a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$;
  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $\quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

- $ax^2 + bx + c = 0$

  Fórmula resolvente: $x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$