Acesso ao Ensino Superior de Estudantes Maiores de 23 Anos
Prova de **Matemática** – 20 de Junho de 2024
Duração: 2 horas

Esta prova é constituída por 6 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.
Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.
Cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

[2,0] **1.** (a) Um código JUNHO20 consiste num número natural, superior a 3 000 e inferior a 23 000. Calcule o número de códigos JUNHO20 que se podem escrever apenas com os algarismos 0, 1, 2 e 3.

[2,0] (b) Num autocarro está um grupo de sete amigos e neste grupo estão quatro irmãos. De quantas maneiras diferentes podem estes sete amigos sair do autocarro de forma a que os quatro irmãos saiam consecutivamente?

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $\left(\frac{1}{49}\right)^{3x-5} < \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-x}$.

[2,0] (b) $\ln\left((1-x)e^{x-1}\right) \leq x$.

3. Determine, caso existam, os seguintes limites de sucessões:

[2,0] (a) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}\right)$.

[2,0] (b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-5}{2n-9}\right)^{5n+4}$.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x < 0 \\ \dfrac{1}{2}(1 + xe^{x-1}), & x \geq 0 \end{cases}$.

[2,0] (a) Estude a continuidade da função f em $x = 0$.

[2,0] (b) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $a = 1$.

[2,0] **5.** Seja f uma função real, de domínio $]0, +\infty[$, cuja derivada, f', de domínio $]0, +\infty[$, é dada por $f'(x) = \dfrac{7 + \ln x}{x}$. Calcule o valor do limite $\lim_{x\to e} \dfrac{f(x) - f(e)}{e^2 - x^2}$.

[2,0] **6.** Seja g a função real, de domínio $]0, \frac{\pi}{2}[$, definida por

$$g(x) = 2\ln(\operatorname{sen} x) - \ln(1 - \operatorname{sen} x) - \ln(1 + \operatorname{sen} x) \quad .$$

Mostre que $g(x) = 2\ln(\operatorname{tg} x)$.

Fim

(Formulário no verso desta folha)

Formulário

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n\in\mathbb{N})$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

- $\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1$

- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

- Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) com razão r:

  Progressão aritmética: $\dfrac{u_1+u_n}{2}\times n$

  Progressão geométrica: $u_1\times\dfrac{1-r^n}{1-r}$

- Regras de derivação:
  $(u+v)' = u'+v'$; $\quad (uv)' = u'v+uv'$; $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$; $\quad (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$;
  $(\operatorname{sen} u)' = u'\cos u$; $\quad (\cos u)' = -u'\operatorname{sen} u$; $\quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
  $(e^u)' = u'e^u$; $\quad (a^u)' = u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$;
  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $\quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

- $ax^2+bx+c=0$

  Fórmula resolvente: $x = \dfrac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$