

FEUP
Exame Especial para Acesso ao Ensino Superior
Prova de Matemática

14 de Junho de 2011

O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.

Apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Cotação das perguntas:

questões 1, 3, 4, 6 e 7: 2,6 valores cada; questão 2: 4 valores; questão 5: 2 valores; questão 8: 1 valor;

1. Considere a sucessão de termo geral $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Verifique se a_n é uma sucessão monótona.
 - (b) Determine a_1 , a_2 e a_3 e calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$.
 - (c) Determine as expressões de a_{2n} e a_{2n+1} e justifique a afirmação: " $a_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ".

2. Considere a seguinte função real de variável real: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{4x + 1}{3} & \text{se } x > 0 \end{cases}$
 - (a) Indique os pontos onde o gráfico de f intersecta os eixos coordenados.
 - (b) Verifique se a função é contínua no ponto $x = 0$.
 - (c) Faça um esboço do gráfico de f .
 - (d) Indique os intervalos de monotonia de $f(x)$ e indique, caso existam, os máximos e mínimos locais de $f(x)$.
 - (e) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f quando $x = -1$.

3. Determine a derivada das seguintes funções: $f(x) = e^{x^3-2x}$, $g(x) = \frac{x-1}{1-3x}$.

4. Considere a função $f(x) = -2 - 3 \ln(1 - 5x)$.
 - (a) Indique o domínio de f .
 - (b) Determine $f(0)$.
 - (c) Indique, caso exista, o valor de x tal que $f(x) = -5$.

5. Determine todos os valores de t para os quais $\cos(\pi + t) = \sin(\pi - t)$.
6. (a) Sejam a e b números reais. Considere os números complexos $z_1 = a - 1 + i$ e $z_2 = 1 + (b + 2)i$. Determine a e b de forma a que $z_1 \cdot z_2 = i$.
- (b) Identifique no plano complexo o conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \leq 1 \wedge |z - 1| \leq |z + i|\}$. Faça um esboço de A .
7. De um grupo de 10 alunos da FEUP (2 por ano curricular) é escolhida ao acaso uma comissão coordenadora de 4 pessoas. Quantas formações da comissão são possíveis, se:
- (a) São escolhidos apenas alunos dos 3 últimos anos curriculares.
- (b) Deve ser escolhido no máximo um aluno do 1º ano.
- (c) São escolhidos alunos de anos todos diferentes.
8. Considere um dado equipamento que é constituído por 10 transístores dos quais 3 são defeituosos. Suponha que 2 transístores são seleccionados ao acaso, com reposição. Qual é a probabilidade de sair pelo menos um transístor defeituoso?

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Regras de derivação

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$