FEUP

Exame Especial para Acesso ao Ensino Superior

Prova de Matemática

11 de Junho de 2012

O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.
Apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.
Não é permitido o uso de máquina de calcular.
Cotação das perguntas:
questões 1, 3, 5 e 7: 3 valores cada; questão 2: 4 valores; questões 4 e 6: 2 valores;

1. Considere a sucessão de termo geral $a_n = \dfrac{2^n + 1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Averigue se $\dfrac{33}{2}$ é termo da sucessão.

   (b) Verifique se a_n é uma sucessão monótona.

   (c) Determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ e indique se a sucessão é ou não uma sucessão limitada.

   (d) Justifique a veracidade da seguinte afirmação: "$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \notin \mathbb{N}$".

2. Considere a seguinte função real de variável real: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

   (a) Indique o domínio de f e os pontos onde o gráfico de f intersecta os eixos coordenados.

   (b) Faça um esboço do gráfico de f, começando por determinar intervalos de monotonia, máximos e mínimos locais, sentido da concavidade e pontos de inflexão, caso existam.

   (c) Determine a expressão de $f(-x)$ e indique se f é uma função par, ímpar ou não está em nenhum destes casos.

3. (a) Determine o valor de $e^{3\ln(2)} \cdot e^{2\ln(3)}$.

   (b) Sendo $f(x) = x\ln(x^2+1)$, determine $f'(x)$.

4. Resolva a equação $2\sin(x) = \sin(2x)$.

5. (a) Faça um esboço no plano complexo do conjunto $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4 \ \wedge\ \dfrac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \dfrac{3\pi}{4} \right\}$.

   (b) Considere os números complexos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = z_1 \cdot z_2$ e $z_4 = z_1^6$. Apresente z_3 e z_4 na forma $a + bi$.

6. Considere um referencial ortonormado fixado no plano. Identifique nesse referencial o conjunto de pontos definido por:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 16 \ \wedge \ y - x - 3 \leq 0 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ y > 0$$

7. Uma lotaria tem 10000 bilhetes numerados de 0000 a 9999. O primeiro prémio é o número do bilhete obtido com a extração sucessiva e com reposição de 4 algarismos ao acaso.

   (a) Um jogador comprou um bilhete com o número 6789. Qual a probabilidade de lhe sair o primeiro prémio?

   (b) Se o jogador comprar todos os bilhetes cujos números têm todos os algarismos iguais, qual a probabilidade de lhe sair o primeiro prémio?

   (c) Qual a probabilidade do número premiado ter todos os algarismos diferentes?

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Regras de derivação

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u+v)' = u'+v'$$

$$(uv)' = u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Complexos

$$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\,\frac{\theta+2k\pi}{n},\ k\in\{0,1,...,n-1\}$$