

FEUP
Exame Especial para Acesso ao Ensino Superior
Prova de Matemática

11 de Junho de 2013

O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.

Apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Cotação das perguntas:

questões 1, 3, 5 e 6: 3 valores cada; questão 2: 4 valores; questões 4 e 7: 2 valores;

1. Considere a sucessão de termo geral $a_n = -\frac{3n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Verifique se a_n é uma sucessão monótona.
 - (b) Determine o primeiro termo da sucessão e calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - (c) Verifique que $-3 < a_n \leq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 - (d) Justifique a veracidade da seguinte afirmação: " $\exists n \in \mathbb{N} : a_n = -2$ ".

2. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.
 - (a) Indique o domínio de f e os pontos onde o gráfico de f intersecta os eixos coordenados.
 - (b) Verifique se f é uma função par, ímpar ou se não está em nenhum destes casos.
 - (c) Faça um esboço do gráfico de f , começando por determinar assíntotas, intervalos de monotonia, máximos e mínimos locais, caso existam, sentido da concavidade e pontos de inflexão, caso existam.

3.
 - (a) Resolva, em \mathbb{R} a equação $\frac{3}{2} \ln x^3 - \ln \sqrt{x} - 2 \ln x = 1$.
 - (b) Sendo $f(x) = e^{x^2+3x} \ln(1+x^2)$, determine $f'(x)$.

4. Considere as funções reais de variável real f e g tais que $f(x) = \cos x - 2$ e $g(x) = 2 - \sin x$.
 - (a) Calcule $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) + g\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.
 - (b) Resolva a equação $f(x) + g(x) = 0$.

5.
 - (a) Faça um esboço no plano complexo do conjunto $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3 \vee \arg z = k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{R} \right\}$.

- (b) Considere os dois números complexos $z_1 = a - i$, $z_2 = 1 + bi$. Determine os valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $z_1 \cdot \overline{z_2} = -4 \cdot i^{96} - 2 \cdot i^{123}$. ($\overline{z_2}$ representa o conjugado de z_2)
6. Considere um referencial ortonormado fixado no plano.
- (a) Verifique que o conjunto de pontos do plano definido por $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$ é uma circunferência que passa pela origem do referencial e indique as coordenadas do centro e o raio.
- (b) Considere a família de retas definida por $kx - y + 1 = 0, k \in \mathbb{R}$. Indique uma propriedade comum a todas as retas desta família e faça um esboço de algumas delas.
7. Uma caixa contém 48 lâmpadas elétricas, das quais 10 são defeituosas. Todas as lâmpadas têm aparência igual e igual probabilidade de serem escolhidas. Retiram-se 3 lâmpadas ao acaso.
- (a) Qual a probabilidade de serem todas defeituosas?
- (b) Qual a probabilidade de pelo menos 2 serem defeituosas?
- (c) Qual a probabilidade de haver alguma defeituosa?
- (Simplifique as expressões mas não efetue os cálculos)*

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Regras de derivação

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$