

EXAME ESPECIAL PARA ACESSO AO ENSINO SUPERIOR
PROVA DE MATEMÁTICA

2015.06.12

- O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.
- A prova é sem consulta e não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Apresente os seus raciocínios de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. (3,5 valores)

Considere a sucessão de termo geral $a_n = \frac{1}{2n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Prove que a sucessão é monótona decrescente.
- A sucessão é limitada?
- Determine, caso exista, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$.
- Verifique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: $\forall n > 997, |a_n| < 0,001$.

2. (5 valores)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

- Indique o domínio de f e os pontos, caso existam, onde o gráfico de f interseja os eixos coordenados.
- Calcule a função derivada de f . Determine os máximos e mínimos locais, caso existam, e indique os intervalos de monotonia.
- Calcule a segunda derivada. Determine os pontos de inflexão, caso existam, e o sentido da concavidade.
- A função tem assíntotas? Justifique.
- Esboce o gráfico da função.

3. (3 valores)

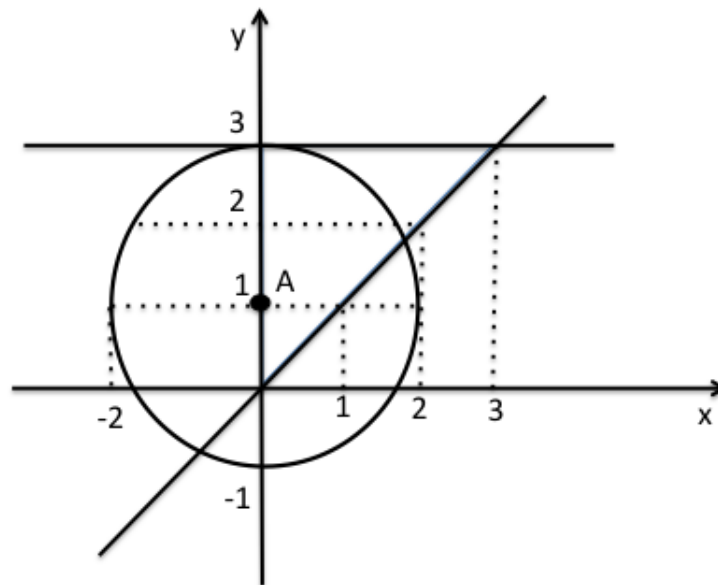
- Simplifique a expressão $e^{2-2\ln(x^2+1)}$. Verifique se existe algum número real x para o qual a expressão toma o valor 1.
- Resolva a equação $\sin(x) - \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0$.

4. (3 valores)

- (a) Determine o conjunto dos números complexos z que satisfaz $\operatorname{Re}(z^2) \geq 0$. Faça um esboço desse conjunto no plano complexo.
- (b) Considere o número complexo $z = \frac{-1+i}{i}$.
- Determine o módulo e o argumento de z .
 - Verifique que $z^4 = -4$.

5. (3 valores)

Considere na figura seguinte o domínio representado a sombreado. Descreva um conjunto de condições que defina esse domínio. *Para além do referencial, estão representadas na figura uma circunferência e duas retas, uma das quais é horizontal.*



6. (2,5 valores)

No exame de uma disciplina o teste é constituído por 10 questões das quais o estudante tem de responder a 7.

- (a) Se o estudante pode escolher as 7 questões a que tem de responder, quantas escolhas diferentes pode fazer?
- (b) E no caso de ter de responder a pelo menos 3 das 5 primeiras questões?

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

| | | | |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| sin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Regras de derivação

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$