U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Exame Especial para Acesso ao Ensino Superior
Prova de Matemática

08 de Junho de 2016

- O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.
- A prova é sem consulta e não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Apresente os seus raciocínios de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. (3 valores)

Considere a sucessão de termo geral $a_n = \dfrac{n}{1-3n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Verifique se a sucessão é monótona.

(b) Determine, caso exista, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(c) A sucessão é limitada?

2. (4 valores)

Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} -3 + (x+4)^2, & x < -4, \\ \frac{3}{4}x - 1, & -4 \leq x \leq 4, \\ \frac{1}{8}x^2, & x > 4. \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f, identificando as curvas desenhadas.

(b) Indique os intervalos de monotonia e os máximos e mínimos locais, caso existam.

(c) A função é contínua em todo o seu domínio? E é derivável?

(d) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f, quando $x = -5$.

(e) Verifique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa. Justifique a sua resposta.

$$\forall y \in \mathbb{R} \;\; \exists x \in \mathbb{R} : \;\; y = f(x)$$

3. (3 valores)

(a) Determine a derivada da função $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+2} + \sin(x^3 - 2x)$

(b) Determine as soluções da seguinte equação $3\cos^2(\theta) - \cos(2\theta) = 1$.

4. (2,5 valores)

Considere a função real de variável real f, definida por

$$f(x) = 5 + \ln(|x-2| - 3).$$

(a) Qual é o domínio da função f?

(b) Verifique que $x = 5 + e^2$ é a única raíz positiva da equação $f(x) = 7$.

5. (2,5 valores)

Considere o número complexo $z_1 = -2 + 2i$.

(a) Determine o módulo e argumento de z^3. Represente, no plano complexo, o afixo deste número.

(b) Se $z_2 = -3 + bi$, qual o valor de b, real, para que o produto $z_1.z_2$ seja um imaginário puro?

6. (2 valores)

Considere um referencial ortonormado fixado no plano. Faça um esboço do conjunto de pontos do plano definido por $x^2 + y^2 \geq 1 \ \wedge \ x^2 + y^2 - 2y \leq 3$.

7. (3 valores)

Para uma lotaria foram emitidos 10000 bilhetes numerados de 0000 a 9999. O prémio, único, é atribuído ao número do bilhete obtido numa extração ao acaso. Qual a probabilidade do prémio ser atribuído a um bilhete:

(a) com algarismos todos diferentes.

(b) com os 2 primeiros algarismos ímpares e iguais.

(c) com os algarismos 1 e 7 a surgirem uma e uma só vez.

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b-\sin a\sin b$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Regras de derivação

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u+v)' = u'+v'$$

$$(uv)' = u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Complexos

$$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\,\tfrac{\theta+2k\pi}{n}, \quad k\in\{0,1,...,n-1\}$$