U. PORTO

FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Exame Especial para Acesso ao Ensino Superior
Prova de Matemática

07 de Junho de 2017

- O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.
- A prova é sem consulta e não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Apresente os seus raciocínios de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. (3 valores)

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Verifique que a sucessão não é monótona.

(b) Mostre que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n \geq \frac{1}{4}$.

(c) Determine, caso exista, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(d) Justifique a veracidade da seguinte afirmação " $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = 1$".

2. (4 valores)

Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = 1 - \frac{3}{x^2-1}$$

(a) Indique o domínio de f e os pontos, caso existam, onde o gráfico de f interseta os eixos coordenados.

(b) Calcule a função derivada de f. Indique os intervalos de monotonia e os máximos e mínimos locais, caso existam.

(c) A função f tem assímptotas? Justifique.

(d) Esboce o gráfico da função f.

(e) Sabendo que $g(x) = \frac{2}{|x|}$, indique o domínio da função fog e determine $fog(-1)$.

3. (3 valores) Considere a função $h(x) = \sin(2x) + \sin(-\frac{7}{4}\pi) + \cos(x) + \cos(-\frac{3}{4}\pi)$.

(a) Determine os zeros da função h.

(b) Determine o valor da derivada de h no ponto $\frac{\pi}{3}$.

4. (2,5 valores)

(a) Resolva, em $\mathbb{R}^+$, a equação $\ln(2x) + \frac{1}{2}\ln(x^4) = \frac{1}{3}\ln((x^3+1)^3)$.

(b) Sabendo que $j(x) = ln(|x-2|-3)+2$, indique o seu domínio.

5. (2,5 valores)

Considere o número complexo $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$.

(a) Determine as raízes quadradas de z_1.

(b) Represente no plano complexo o conjunto de pontos definido pela condição

$$Im(z+i) \geq Re(z_1) \quad \wedge \quad |z-1| \leq 3.$$

6. (2 valores)

Num referencial ortonormado Oxyz, considere os planos α e β e a reta r definidos pelas condições

$$\alpha: \quad 4x - 2y + 4z = 4 \qquad \beta: \quad 2x + 2y - z = 1 \qquad r: \quad x + y = 2 \ \wedge \ z = 0$$

(a) Mostre que o plano α é perpendicular ao plano β.

(b) Verifique se reta r é paralela ao plano β.

7. (3 valores)

Numa festa de aniversário compareceram 6 rapazes e 14 raparigas. Nessa festa vão ser realizadas várias atividades. Para a realização da atividade Paintball, vai ser necessário criar um grupo de 5 convidados escolhidos aleatoriamente.

(a) Quantos grupos diferentes se podem formar?

(b) Considerando que foi feita uma escolha sequencial e sabendo que a 1ª pessoa a ser sorteada para esse grupo foi uma rapariga, qual a probabilidade da 2ª pessoa ser também uma rapariga.

(c) Indique a probabilidade de nesse grupo existirem 2 rapazes e 3 raparigas.

Nota: Nesta questão deverá simplificar as expressões mas não efetuar os cálculos.

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Regras de derivação

$$(e^u)' = u'e^u \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u+v)' = u'+v' \qquad (uv)' = u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \qquad (u^n)' = nu^{n-1}u'$$

$$(\sin(u))' = u'\cos(u) \qquad (\cos(u))' = -u'\sin(u)$$

Complexos

$$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\, \frac{\theta+2k\pi}{n}, \quad k\in\{0,1,...,n-1\}$$