U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Exame Especial para Acesso ao Ensino Superior
Prova de Matemática

03 de Junho de 2019

- O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.
- A prova é sem consulta e não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Apresente os seus raciocínios de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
- Separe as respostas às questões $1-3$ das respostas às questões $4-7$.

1. (3 valores)

Considere a sucessão de termo geral $a_n = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 5 \\ 7 - \frac{1}{n-5}, & \text{se } n > 5. \end{cases}$

(a) Determine os valores de a_3, a_5, a_7.

(b) Verifique se a sucessão a_n é uma sucessão monótona.

(c) Verifique se a sucessão a_n é uma sucessão convergente.

2. (4 valores)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$.

(a) Indique o domínio de f.

(b) Determine, caso existam, os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas.

(c) Verifique se existem assímptotas horizontais ou verticais de f.

(d) Verifique que no domínio de f se tem $f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{(x+1)^3}$ e indique os intervalos de monotonia e os máximos e mínimos locais, caso existam.

(e) Assuma, sem calcular, que $f''(x) = \dfrac{4(2-x)}{(x+1)^4}$. Determine o sentido da concavidade e pontos de inflexão, caso existam, da função.

(f) Com base na informação obtida nas alíneas anteriores, faça um esboço do gráfico de f.

3. (2 valores)

Considere a função $f(x) = \ln(x^2-3)$.

(a) Determine o domínio D_f de f, e os pontos x desse conjunto onde $f(x) = 0$.

(b) Calcule $f'(x)$.

(c) Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa, justificando: $\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$.

4. (2 valores) Considere a função real de variável real $f(x) = \sqrt{2}\cos^2(\frac{x}{6}) - \sqrt{2}\sin^2(\frac{x}{6}) - \tan(-\frac{\pi}{4})$.

(a) Calcule $f(\pi)$.

(b) Determine a menor raiz positiva de f.

(c) Indique o contradomínio de f.

5. (3 valores)

(a) Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $z^3\bar{z} = i$, onde $\bar{z}$ representa o conjugado de z.

(b) Represente no plano complexo o conjunto de pontos definido pela condição

$$\frac{|z-2i|}{|z-1-i|} \leq 1 \quad \wedge \quad |z-i| \leq 1.$$

6. (3 valores) Considere o plano de equação $\pi : -3x + y + 2z + 2 = 0$ e o ponto $R \hookrightarrow (1, -1, 2)$.

(a) Mostre que a reta de equações

$$r : \begin{cases} x - 1 & = & 2z \\ 2x - 1 & = & y. \end{cases}$$

está contida em π.

(b) Determine o ponto E do plano π, tal que $\overrightarrow{ER}$ seja perpendicular a π.

7. (3 valores)

(a) Com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4 quantos números diferentes superiores a 1000 e de quatro algarismos diferentes, se podem escrever?

(b) De um baralho de 52 cartas, constituído por 13 cartas de cada naipe: ouros, copas, espadas e paus, um jogador recebe uma mão de póquer (5 cartas).

i) De quantas maneiras diferentes esse jogador pode receber quatro cartas de ouros e o ás de espadas.

ii) Qual é a probabilidade das cinco cartas serem duas vermelhas (ouros ou copas) e três espadas.

Nota: Nesta questão deverá simplificar as expressões mas não efetuar os cálculos.

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Regras de derivação

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u+v)' = u'+v'$$

$$(uv)' = u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Complexos

$$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\,\tfrac{\theta+2k\pi}{n}, \quad k\in\{0,1,...,n-1\}$$