U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Exame Especial para Acesso ao Ensino Superior
Prova de Matemática

01 de Junho de 2020

- O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.
- A prova é sem consulta e não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Apresente os seus raciocínios de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
- Separe as respostas às questões $1-3$ das respostas às questões $4-7$.

1. (2 valores)

Considere a sucessão de termo geral $a_n = n^2 - 8n - 9$.

(a) Verifique se 0 é um termo da sucessão. Em caso afirmativo, indique a ordem do termo.

(b) Pronuncie-se sobre a monotonia da sucessão a_n.

(c) Verifique se a sucessão a_n é uma sucessão convergente.

2. (4,5 valores)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

(a) Indique o domínio de f e determine, caso existam, os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas.

(b) Verifique se existem assímptotas horizontais ou verticais de f.

(c) Verifique se f é uma função par ou se é uma função ímpar.

(d) Indique os intervalos de monotonia e os máximos e mínimos locais, caso existam.

(e) Determine o sentido da concavidade e pontos de inflexão, caso existam, da função.

(f) Com base na informação obtida nas alíneas anteriores, faça um esboço do gráfico de f.

3. (2,5 valores)

Considere a função $g(x) = -5e^{-x} + 2$.

(a) Determine o domínio D_g de g, e os pontos x desse conjunto onde $g(x) = 0$.

(b) Calcule $g'(x)$ e conclua que g é uma função injetiva.

(c) Determine a função inversa de g.

(d) Verifique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: $\exists l \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ g(n) < l$.

4. (2 valores) Considere a função real de variável real $h(x) = \cot(x) + \tan(x)$.

(a) Determine o domínio D_h de h.

(b) Mostre que $h(x) = \dfrac{2}{\sin(2x)}, \quad \forall x \in D.$

(c) Resolva a equação $h(x) = 4$.

5. (3 valores)

(a) Calcule, na forma trignométrica, $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^6}{i\,(1-i)^4}$.

(b) Represente no plano complexo o conjunto de pontos definido pela condição

$$|z - i| \geq 2 \quad \vee \quad Im\,(z - 2 + i) \geq 2.$$

6. (3 valores) Considere a reta

$$r : \begin{cases} x & = & 1 \\ \dfrac{y-1}{2} & = & 1 - z. \end{cases}$$

e o ponto $P \hookrightarrow (1, 1, 0)$.

(a) Escreva uma equação do plano π que contem o ponto P e é perpendicular à reta r.

(b) Calcule a distância do ponto P à reta r.

7. (3 valores) Numa urna existem 12 bolas numeradas de 1 a 12, sendo 4 azuis e 8 vermelhas. Suponha que se retirou da urna:

(a) duas bolas em simultaneo. Indique qual a probabilidade de serem ambas vermelhas.

(b) duas bolas, uma de cada vez. Calcule a probabilidade da primeira bola ser azul e a segunda ser vermelha.

(c) uma a uma as bolas e que estas foram colocadas em fila. Determine a probabilidade das 4 bolas azuis estarem juntas.

Nota: Nesta questão deverá simplificar as expressões mas não efetuar os cálculos.

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b-\sin a\sin b$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Regras de derivação

$(e^u)' = u'e^u$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(u+v)' = u'+v'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$

$(\sin(u))' = u'\cos(u)$

$(\cos(u))' = -u'\sin(u)$

Complexos

$$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\,\tfrac{\theta+2k\pi}{n}, \quad k\in\{0,1,...,n-1\}$$