U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Exame Especial para Acesso ao Ensino Superior
Prova de Matemática

04 de Junho de 2021

- O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.
- A prova é sem consulta e não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Apresente os seus raciocínios de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
- Separe as respostas às questões $1-3$ das respostas às questões $4-7$.

1. (2 valores)

Considere a sucessão de termo geral $a_n = n\,3^{1-n}$.

(a) Indique os valores de a_1 e a_3.

(b) Verifique que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{2}{3}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Utilize a alínea anterior para concluir sobre a monotonia da sucessão a_n.

2. (4,5 valores)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

(a) Indique o domínio de f e determine, caso existam, os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas.

(b) Verifique se existem assímptotas horizontais ou verticais de f.

(c) Indique os intervalos de monotonia e os máximos e mínimos locais, caso existam.

(d) Analise a concavidade da função e determine os pontos de inflexão, caso existam.

(e) Com base na informação obtida nas alíneas anteriores, faça um esboço do gráfico de f.

3. (2,5 valores)

(a) Considere a função $g(x) = \ln(x-4) + 1$. Determine o domínio de g e os pontos x desse conjunto onde $g(x) = 0$.

(b) Resolva a equação $\ln(2x+1) - \ln(x) = -2\ln(3)$.

4. (2 valores) Considere a função real de variável real $h(x) = 1 + 2\cos(3x)$.

(a) Determine o contradomínio de $h(x)$.

(b) Calcule, caso existam, os zeros de h.

(c) Resolva a equação $h(x) = h(x + \frac{\pi}{2})$.

5. (3 valores)

(a) Reduza à forma $a + bi$ o número complexo $\dfrac{1 - \sqrt{3}\,i}{2i\,(1+i)^6}$.

(b) Represente no plano complexo o conjunto de pontos definido pela condição

$$|z - 1| \geq 1 + Re(z) \quad \wedge \quad Re(z) \geq 1 \quad \wedge \quad |z - 1 - 2i| < 1.$$

6. (3 valores)

(a) Um plano α contém os pontos $P \hookrightarrow (1, -1, 2)$ e $Q \hookrightarrow (2, 3, 2)$ e é perpendicular ao plano β : $2x + z = 0$. Escreva uma equação do plano α.

(b) Considere a reta r de equação $x - 1 = \dfrac{y}{2} = 2z$. Determine o ponto de interseção da reta r com o plano definido por $x - y + z = 0$.

7. (3 valores) Um saco contém 10 bolas brancas e 5 pretas.

(a) Extrai-se uma bola do saco que é reposta antes da extração de uma segunda bola.

i) Calcule a probabilidade de a primeira bola ser preta e a segunda ser branca.

ii) Supondo que esta experiência se repete duas vezes (extrai-se 4 bolas com reposição), calcule a probabilidade de sair apenas uma bola preta.

(b) Extrai-se uma bola do saco e de seguida extrai-se outra bola sem repor a primeira. Calcule a probabilidade de uma delas ser preta e a outra branca.

Nota: Nesta questão deverá simplificar as expressões mas não efetuar os cálculos.

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Regras de derivação

$(e^u)' = u'e^u$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(u+v)' = u'+v'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$

$(\sin(u))' = u'\cos(u)$

$(\cos(u))' = -u'\sin(u)$

Complexos

$$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\, \tfrac{\theta+2k\pi}{n}, \quad k \in \{0,1,...,n-1\}$$