U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Exame Especial para Acesso ao Ensino Superior
Prova de Matemática

30 de Maio de 2022

- O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.
- A prova é sem consulta e não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Apresente os seus raciocínios de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
- Separe as respostas às questões $1-4$ das respostas às questões $5-7$.

1. (2 valores)

Considere a sucessão real a_n, satisfazendo $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, e definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} - \frac{2}{(n)(n-1)}, \quad n > 1 \end{cases}$$

(a) Calcule os dois primeiros termos de ordem par da sucessão.

(b) Classifique a sucessão relativamente à monotonia justificando devidamente.

(c) Indique o valor lógico da seguinte proposição. Justifique a sua resposta.

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in N \quad : \quad a < a_n \leq b$$

2. (4,5 valores)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{2}{x^2-4}$.

(a) Indique o domínio de f e determine, caso existam, os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas.

(b) Verifique se existem assímptotas horizontais ou verticais de f.

(c) Indique se f é uma função par ou ímpar.

(d) Indique os intervalos de monotonia e os máximos e mínimos locais, caso existam.

(e) Analise a concavidade da função e determine os pontos de inflexão, caso existam.

(f) Com base na informação obtida nas alíneas anteriores, faça um esboço do gráfico de f.

3. (2,5 valores)

(a) Considere a função $g(x) = \ln(\sqrt{x+1}) - 2$. Determine o domínio de g e os pontos x desse conjunto onde $g(x) = 0$.

(b) Resolva a equação $\ln(\sqrt{x+1}) = \ln{(x + \frac{1}{2})}$.

4. (3 valores)

Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
Seja $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ tal que $h(2\alpha + \pi) = 1 - \sqrt{2}$.

(a) Determine o valor de α.

(b) Determine o contradomínio de $h(x)$.

(c) Considere agora o intervalo $]0, 4\pi[$. Calcule os zeros de h neste intervalo e o valor máximo de h no mesmo intervalo.

5. (3 valores)

(a) Determine as soluções de $z - 3\bar{z} = 2 + 3i$.

(b) Usando a forma exponencial, determine $(1-i)^{20}$ e exprima este número na sua forma algébrica, $a + bi$.

6. (2 valores)

(a) Faça um esboço da região no plano definida pela condição seguinte, indicando os pontos relevantes.

$$x^2 + y^2 \leq 9 \ \wedge \ (x < 1 \ \vee \ y \leq 1)$$

(b) Considere a reta s de equação $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Determine a equação da reta r que é perpendicular a s e passa pelo ponto $(3, 1)$.

7. (3 valores)

Um exame contém 2 partes, parte I e parte II. A parte I contém 10 questões. A parte II tem 2 secções A e B com respetivamente 9 e 6 questões.

Para fazer o exame cada estudante deve escolher e responder a 6 questões da parte I e da parte II a 6 questões da secção A e a 4 questões da secção B.

(a) De quantas formas diferentes pode o estudante escolher as 6 questões da parte I?

(b) De quantas formas diferentes pode o estudante escolher as questões da parte II?

(c) Um estudante não leu devidamente as instruções relativas ao exame e respondeu a 10 questões escolhidas ao acaso da parte II. Qual a probabilidade de ter respondido a 6 questões da secção A e a 4 questões da secção B?

Nota: Nesta questão deverá simplificar as expressões mas não efetuar os cálculos.

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b-\sin a\sin b$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Regras de derivação

$(e^u)' = u'e^u$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(u+v)' = u'+v'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$

$(\sin(u))' = u'\cos(u)$

$(\cos(u))' = -u'\sin(u)$

Complexos

$$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\,\tfrac{\theta+2k\pi}{n}, \quad k\in\{0,1,...,n-1\}$$