U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Exame Especial para Acesso ao Ensino Superior
Prova de Matemática

27 de Maio de 2024

- O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.
- A prova é sem consulta e não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Apresente os seus raciocínios de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
- Separe as respostas às questões $1-4$ das respostas às questões $5-7$.

1. (2 valores)

Considere a sucessão real de termo geral, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$.

(a) Determine os termos a_{2p} e a_{2p-1}.

(b) Classifique a sucessão relativamente à monotonia, justificando.

(c) Indique valor lógico da seguinte proposição. Justifique a sua resposta.

$$\exists K, M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in N \quad : \quad K \leq a_n \leq M$$

(d) Conclua relativamente à convergência da sucessão, justificando devidamente.

2. (4,5 valores)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

(a) Indique o domínio de f e determine, caso existam, os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas.

(b) Verifique se existem assímptotas horizontais, verticais ou oblíquas de f.

(c) Indique se f é uma função par ou ímpar.

(d) Indique os intervalos de monotonia e os máximos e mínimos locais, caso existam.

(e) Analise a concavidade da função e determine os pontos de inflexão, caso existam.

(f) Com base na informação obtida nas alíneas anteriores, faça um esboço do gráfico de f.

3. (2,5 valores)

Considere a função $g(x) = \ln(\dfrac{4}{x^2} - 1)$.

(a) Determine o domínio de g e os pontos x desse conjunto onde $g(x) \leq 0$.

(b) Resolva a equação $g(x) = \ln(2-x)$.

4. (2 valores)

Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Seja $\alpha \in \,]-\pi, 0[$ tal que $h(2\alpha + 1) = 1$

(a) Determine o valor de α.

(b) Considere o intervalo $]0, \pi[$. Calcule os zeros de h' neste intervalo e o valor máximo de h no mesmo intervalo.

5. (3 valores)

(a) Escreva o número complexo $z = -81$ na forma exponencial e determine as suas raízes quartas.

(b) Represente no plano complexo o conjunto de pontos z definido por:

$$1 \leq \left| z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leq 2 \quad \wedge \quad Re(z) \geq 0$$

6. (3 valores)

(a) Mostre que os planos Π_1 e Π_2 definidos pelas equações:

$$\Pi_1 : x + 2y - z = 2, \quad \Pi_2 : 3x + 6y - 3z = 12$$

são paralelos.

(b) Considere o ponto $P_1 = (0, 1, 0)$ no plano Π_1. Determine o ponto $P_2 = (a, b, c)$ pertencente ao plano Π_2, tal que $P_1\vec{P_2}$ seja ortogonal aos planos Π_1 e Π_2.

(c) Determine a distância entre os planos Π_1 e Π_2.

7. (3 valores)

Um grupo de 8 amigos vai jantar fora a um restaurante que apenas tem duas mesas livres, cada uma das quais para 4 pessoas.

(a) De quantas formas diferentes podem os 8 amigos sentar-se nas duas mesas de 4 pessoas?

(b) O João e o António zangaram-se e não querem ficar na mesma mesa. De quantas maneiras diferentes podem os 8 amigos distribuir-se pelas duas mesas de 4 pessoas, atendendo a esta limitação?

(c) Qual é a probabiliddae de o João e o António ficarem na mesma mesa se os empregados do restaurante sentarem as pessoas totalmente ao acaso nas duas mesas de 4?

Nota: Nesta questão deverá efetuar todos os cálculos.

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b-\sin a\sin b$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Regras de derivação

$(e^u)' = u'e^u$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$

$(u+v)' = u'+v'$

$(\sin(u))' = u'\cos(u)$

$(uv)' = u'v+uv'$

$(\cos(u))' = -u'\sin(u)$

Complexos

$$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\,\tfrac{\theta+2k\pi}{n}, \quad k\in\{0,1,...,n-1\}$$