SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 37, 4º, 1050–187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349
www.spm.pt gebs@spm.pt

Proposta de resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática
Para a prova de Matemática B (código 735)
2ª. Fase – 16/07/08

1.1 As coordenadas pedidas são:

Pontos	Coordenadas
A	(0, 0)
B	(750, 0)
C	(750, 450)
D	(900, 450)
E	(900, 750)
F	(500, 750)

1.2 A equação pedida é da forma $y = mx + b$, com m e b valores reais a determinar. Usando as coordenadas dos pontos A e F anteriormente determinadas, somos conduzidos ao sistema

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ 750 = m \cdot 500 + b \end{cases}, \text{ donde } \begin{cases} b = 0 \\ m = 1{,}5 \end{cases}$$

A equação é $y = 1{,}5x$.

2.1 Se a equação fosse possível, isso significaria que era possível introduzir um número de trutas tal que a proporção desta espécie no tanque seria 1 (100%). Neste caso, haveria apenas trutas no tanque, o que é incompatível com a existência dos 300 robalos.

2.2 $P(x) = 0{,}25 \Leftrightarrow \dfrac{x}{300 + x} = 0{,}25 \Leftrightarrow x = 0{,}25 \cdot (300 + x) \Leftrightarrow x = 100$

É necessário introduzir 100 trutas.

3.1 $p = \dfrac{\text{nº. de robalos}}{\text{nº. total de peixes}} = \dfrac{300}{300 + 200} = 0{,}6$

3.2 Considerem-se as seguintes listas (numa TI-83)

L_1	L_2
157	52
165	61
168	67
159	60
172	70
165	65
166	66
163	62
159	58
169	72
171	72
168	68

Recorrendo ao comando LinReg(ax + b), obtém-se $r \approx 0{,}94$.
O valor obtido, bem como a nuvem de pontos que se pode visualizar, indica a existência de uma forte correlação linear positiva entre as variáveis.

4.1 A tabela pedida é

$\boldsymbol{\theta}$	0º	90º	180º	270º	360º
$\boldsymbol{h}$	7	12	7	2	7

Da figura, $h = \overline{OB} + \overline{PD} = 7 + \overline{PD}$; considerando o triângulo rectângulo [OPD], vem $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\overline{PD}}{5} \Leftrightarrow \overline{PD} = 5\operatorname{sen}\theta$. Substituindo na expressão de h, vem finalmente $h = 7 + 5\operatorname{sen}\theta$.

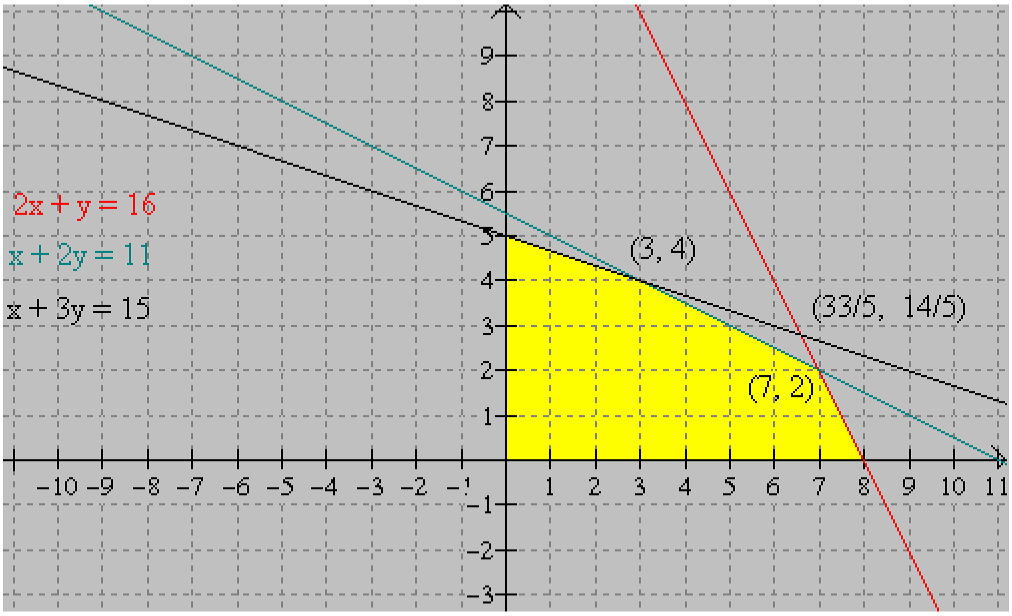
4.2 Atendendo a que os raios estão em progressão aritmética de razão 0,1, estes serão 3; 3,1; 3,2; …; 3,9.
A quantidade de fio pedida é assim dada pela soma dos perímetros das respectivas circunferências, ou seja, $2\pi \cdot 3 + 2\pi \cdot 3{,}1 + \ldots + 2\pi \cdot 3{,}9 \approx 216{,}77$ metros.

5.1 Para fabricar 4 toneladas de FarX e 3 toneladas de FarY são necessários $4\times 2 + 3\times 1 = 11$ quilogramas de vitaminas, $4\times 1 + 3\times 2 = 10$ quilogramas de sabores e $4\times 1 + 3\times 3 = 13$ quilogramas de conservantes. Atendendo às restrições indicadas, conclui-se que é possível.

5.2 Usando a notação sugerida no enunciado, as restrições são

$$\begin{cases} x,\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 16 \\ x + 2y \leq 11 \\ x + 3y \leq 15 \end{cases}$$

A função objectivo é $F = x + y$ e a região admissível está representada a amarelo na figura



Calculando o valor da função objectivo nos vértices da região admissível, conclui-se que esta é máxima no ponto (7, 2); os valores são pois $x = 7$ e $y = 2$.

6. Para calcular a idade do papel, devemos resolver a equação em *t*

$0{,}96c = c \cdot e^{-0{,}000121t}$. Dividindo ambos os membros por *c* (*c*>0) e aplicando logaritmos, vem $\ln(0{,}96) = -0{,}000121t$ e portanto $t = \dfrac{\ln(0{,}96)}{-0{,}000121} \approx 337$.

O texto pedido poderá então ser:

Recorrendo à fórmula dada, concluímos que o papel em causa tem a idade de 337 anos, pelo que foi produzido em 1671, já que $2008 - 337 = 1671$. Como Leonardo da Vinci descobriu a solução em 1504, conclui-se que o manuscrito não pode ser da sua autoria.