

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 25 DE JULHO 2022

1. Editemos os dados que nos são fornecidos em duas listas da calculadora, em vista à obtenção dos parâmetros necessários à definição da equação da reta de regressão linear entre as duas variáveis.

L1	L2	L3	L4	L5	2
5	340				
6.5	450				
7	478				
7.7	515				
8	550				
8.6	580				
9.4	630				

L2(8)=

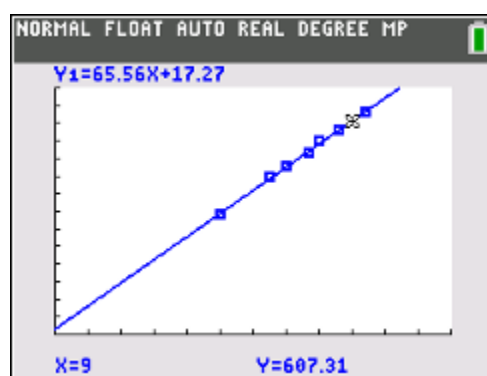
```

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP
LinReg(ax+b)
Xlist:L1
Ylist:L2
FreqList:
Store RegEQ:
Calculate
  
```

```

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP
LinReg
y=ax+b
a=65.55794965
b=17.26786119
  
```

Obtidos os parâmetros podemos editar a equação da reta em vista à obtenção do seu gráfico e, a partir dele, a imagem de 9.



Resposta: Para um treino com 9 Km de corrida é de estimar que sejam gastas 607 calorias.

2. Sabemos que $P(Y = 0) = \frac{9}{65}$, logo temos que $P(X = 2) = \frac{9}{65}$

Também sabemos que $P(Y = 1) = \frac{32}{65}$, logo $P(X = 1) = \frac{32}{65}$

Como a variável X só toma os valores 0, 1 ou 2, podemos concluir que

$$P(X = 0) = 1 - \left(\frac{32}{65} + \frac{9}{65} \right) = \frac{24}{65}$$

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é então:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{24}{65}$	$\frac{32}{65}$	$\frac{9}{65}$

$$\text{Valor médio: } \mu = \frac{24}{65} \times 0 + \frac{32}{65} \times 1 + \frac{9}{65} \times 2 = \frac{50}{65} \approx 0,7692$$

Resposta : O valor médio de X é, aproximadamente, 0,77

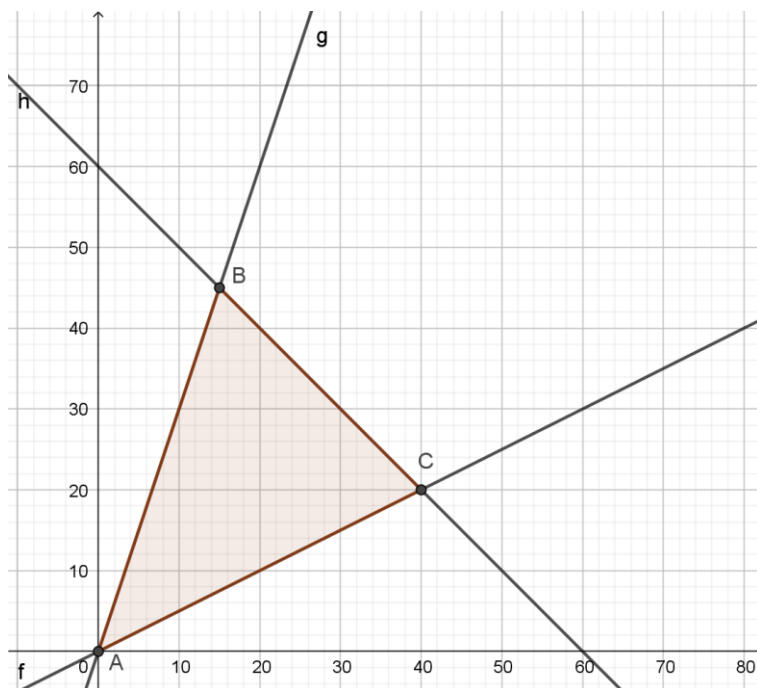
3. A função objetivo, que se pretende maximizar, é $L(x, y) = 150000x + 250000y$

Quanto às restrições, a relação entre o número de apartamentos T2 e T3 obriga a que $x \leq 2y$ e que $y \leq 3x$. Quanto ao total de apartamentos, a restrição é $x + y \leq 60$.

Tendo em conta as restrições óbvias $x \geq 0$ e $y \geq 0$ e as mencionadas anteriormente, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x \leq 2y \\ y \leq 3x \\ x + y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{2} \\ y \leq 3x \\ y \leq -x + 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Desta forma, a representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições é:



Os vértices da região admissível, excluindo a origem (que anula, obviamente a função objetivo), obtêm-se por interseção das retas que a definem e são $B(15,45)$ e $C(40,20)$

Averiguemos agora qual a solução ótima:

$$L(15,45) = 150\,000 \times 15 + 250\,000 \times 45 = 13\,500\,000$$

$$L(40,20) = 150\,000 \times 40 + 250\,000 \times 20 = 11\,000\,000$$

Resposta: O valor máximo que a empresa pode obter é 13 500 000 € correspondente à venda de 15 apartamentos T2 e 45 T3.

4.

4.1. Condição A): $p = 0$

$$N(0) = -\frac{1}{50} \times 0 + 60 = 60 \quad \text{o que corresponde ao arrendamento dos 60 apartamentos.}$$

Condição B): $p = 3000$

$$N(3000) = -\frac{1}{50} \times 3000 + 60 = -60 + 60 = 0 \quad \text{o que significa se arrendada zero apartamentos.}$$

Condição C): Calculemos o valor de N para $p + 50$:

$$\begin{aligned} N(p+50) &= -\frac{1}{50} \times (p+50) + 60 = \\ &= -\frac{1}{50} p - \frac{50}{50} + 60 = -\frac{1}{50} p + 60 - 1 \\ &= N(p) - 1 \end{aligned}$$

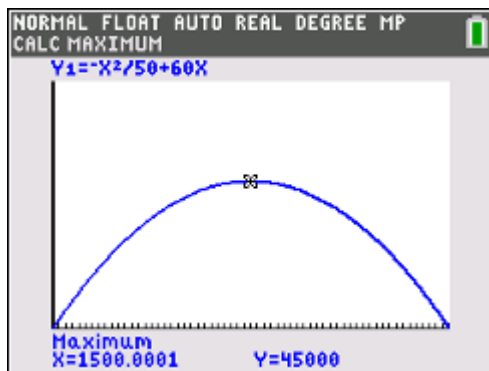
o que significa que se a renda aumentar 50€ arrenda-se menos um apartamento, para qualquer valor de p com $0 < p < 3000$.

Ficam assim verificadas as três condições.

4.2. Temos que encontrar o máximo da função $R(p)$ com $0 \leq p \leq 3000$

$$R(p) = p \times N(p) = p \times \left(-\frac{1}{50} p + 60 \right) = -\frac{1}{50} p^2 + 60p$$

Editemos esta função na calculadora gráfica, tendo em conta o seu domínio, e determinemos o máximo:



Resposta: O rendimento será máximo quando $p = 1500$, isto é, quando a renda for de 1500€.

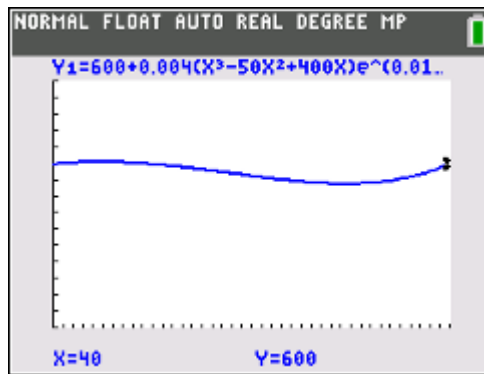
5.

5.1. A diferença pretendida será dada pela diferença entre $f(0)$ e $f(40)$

Podemos editar a função na calculadora e obter $f(40)$, uma vez que é fácil obter

$$f(0) = 600 + 0,004(0 - 0 + 0)e^{-1} = 600$$

Recorrendo à calculadora gráfica:



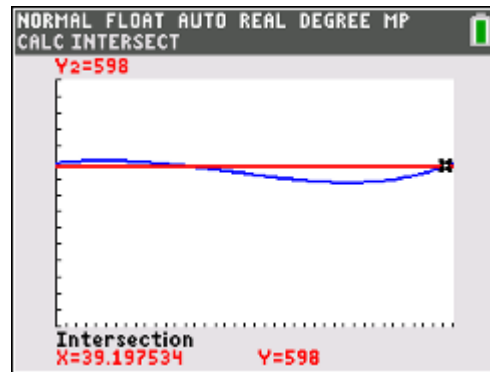
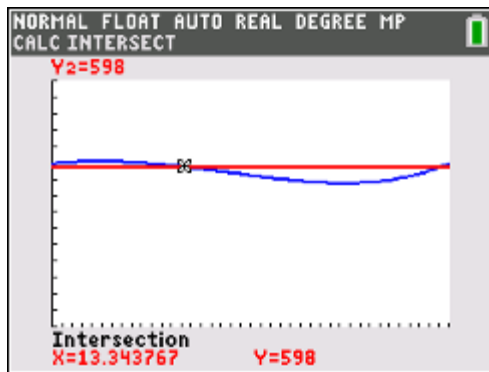
$$f(0) - f(40) = 600 - 600 = 0$$

Resposta: a diferença de altitudes é nula.

5.2. Para além da função, editemos também na calculadora a reta de equação $y = 598$

Temos que usar uma janela de visualização adequada, por exemplo, fazendo $x \in [0, 40]$ e $y \in [500, 650]$

Vejamos os gráficos e as interseções necessárias:



Tendo em conta as abcissas dos pontos de interseção, vemos que a altitude é superior a 598, até aos 13,3438 Km e a partir dos 39,1975 km

$$\text{Ora } 40 - 39,1975 = 0,8025$$

$$13,3438 + 0,8025 = 14,1463 \approx 14,1 \text{ Km}$$

Resposta: Durante 14,1 Km a altitude foi superior a 598 metros.

6. A taxa de variação instantânea corresponde à derivada de uma função. Então, temos que relacionar o sinal da função T , com a monotonia da função original, função que nos dá a velocidade da bicicleta. Podemos registar isso numa tabela, utilizando a informação que recolhemos do gráfico de T :

x	0		16		32		35
sinal de T	0	+	0	-	0	-	-
Monotonia da velocidade		↗		máx	↘		↘

Resposta: O valor da velocidade foi máximo aos 16 minutos de treino.

7.

- 7.1. A partir dos dados do problema podemos completar a imagem de um azulejo, em referencial ortogonal, da forma representada à direita.

Podemos concluir que o comprimento do retângulo $[OABC]$ é 12 cm, uma vez que a ordenada de C é 12 e, como a ordenada de D é 7, pois corresponde à ordenada na origem da reta de equação $y = x + 7$, a sua largura é igual a $\overline{OA} = \overline{OC} - \overline{OD} = 12 - 7 = 5$ cm.

Desta forma a área do retângulo $[OABC] = 5 \times 12 = 60 \text{ cm}^2$.

Por outro lado, no azulejo visualizamos dois quartos de uma circunferência centrada na origem e de raio $\overline{OA} = \overline{CD} = 5$. Estes dois quartos de circunferência formam uma semicircunferência, cuja área do semicírculo correspondente é:

$$\text{Área do semicírculo} = \frac{\pi \times 5^2}{2} = \frac{25\pi}{2}$$

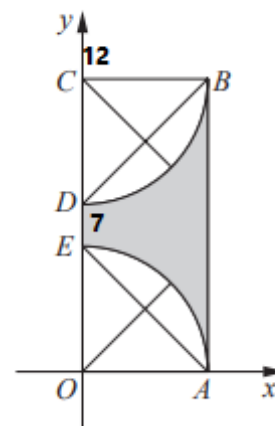
A região a sombreado é dada por:

$$\text{Área retângulo } [OABC] - \text{Área do semicírculo} = 60 - \frac{25\pi}{2} \approx 20,73 \text{ cm}^2$$

Como o friso é composto por 5 azulejos, temos que a área da região sombreada correspondente aos cinco azulejos é:

$$5 \times 20,73 \approx 104 \text{ cm}^2$$

Resposta: A área da região sombreada é 104 cm^2



7.2. Para que o retângulo $[RSTQ]$ seja o transformado do retângulo $[UPQT]$ é necessário que a rotação seja tal que transforme U em R , P em S , Q em T e T em Q .

Ora isso só acontece se a rotação tiver centro no ponto médio de $[TQ]$ e amplitude 180° , seja no sentido horário ou no sentido anti-horário.

Resposta: O centro de rotação é o ponto médio de $[TQ]$ e a amplitude é 180° ou -180° .

8.

8.1. Verifica-se que na etapa 2, a área do quadrado é metade da área do quadrado da etapa 1. Na etapa 3 a área do quadrado é metade da área do quadrado da etapa 2 e assim sucessivamente.

Conclui-se assim que as áreas dos sucessivos quadrados formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Como a área do quadrado da etapa 1 é L^2 , a área do quadrado de ordem n é dada, em centímetros quadrados, por:

$$A_n = L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ tal como se pretendia mostrar.}$$

8.2. Tem-se que $A_{12} = \frac{1}{2}$, logo,

$$\begin{aligned} L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow L^2 &= \frac{1}{2} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \Leftrightarrow L^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-10} \\ \Leftrightarrow L^2 &= 2^{10} \Leftrightarrow L = 2^5 = 32 \text{ porque } L > 0. \end{aligned}$$

Resposta: $L = 32$ cm.

9.

9.1. Tem-se que:

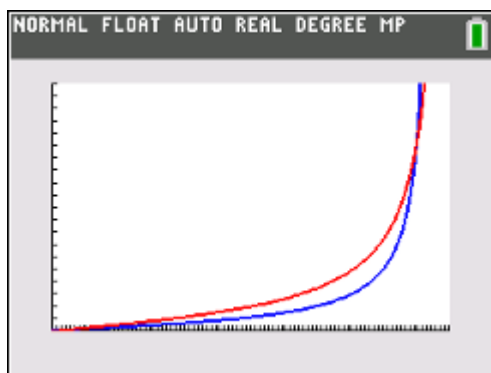
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{2 \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} = 2 \times \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Conclui-se assim, como queríamos mostrar, que: $\operatorname{tg} \beta = 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$

9.2. Como $\beta = \alpha + 3,75^\circ$, tem-se que:

$$\operatorname{tg} (\alpha + 3,75^\circ) = 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Colocando na calculadora gráfica as expressões $y_1 = \operatorname{tg}(x + 3.75)$ e $y_2 = 2 \operatorname{tg}(x)$ obtém-se as seguintes representações gráficas:



Existem dois pontos de interseção.: $A(3,783; 0,132)$ e $B(82,467; 15,125)$, logo tem-se que as soluções da equação para $\alpha \in]0^\circ, 90^\circ[$ são $\alpha \approx 3,783$ ou $\alpha \approx 82,467$.

Como o enunciado refere que se pretende os minutos do **pôr do sol** para os quais tem início a observação da duplicação das sombras, tal só pode ocorrer quando $\alpha \approx 82,467$ e assim sendo as horas pretendidas são dadas por $\frac{90^\circ - 82,467^\circ}{15^\circ} \approx 0,5022$, o que corresponde a 30 minutos aproximadamente.

Resposta: A observação tem início a, aproximadamente, 30 minutos do pôr do sol.

FIM