Ficha de Trabalho

Teorema de Bolzano e corolário

1

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo $[-2, 2]$

Tem-se $f(-2) = 1$ e $f(2) = 3$

Indique qual das expressões seguintes define uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $]-2, 2[$

(A) $g(x) = x + f(x)$

(B) $g(x) = x - f(x)$

(C) $g(x) = x^2 + f(x)$

(D) $g(x) = x^2 - f(x)$

7

Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo $[-1, 4]$

Tem-se $f(-1) = 3$ e $f(4) = 9$

Em qual das opções seguintes está definida uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $]-1, 4[$?

(A) $g(x) = 2x + f(x)$

(B) $g(x) = 2x - f(x)$

(C) $g(x) = x^2 + f(x)$

(D) $g(x) = x^2 - f(x)$

8

Relativamente a duas funções, f e g, sabe-se que:

- têm domínio $[2, 3]$
- são funções contínuas
- $f(2) - g(2) > 0$ e $f(3) - g(3) < 0$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) Os gráficos de f e g intersectam-se em pelo menos um ponto.

(B) A função $f - g$ é crescente.

(C) Os gráficos de f e g não se intersectam.

(D) A função $f - g$ é decrescente.

9

De uma função f de domínio $[1,2]$ sabe-se que:

- f é contínua em todo o seu domínio
- $\forall x \in [1,2],\ f(x) < 0$
- $f(1) = 3\,f(2)$

Seja g a função de domínio $[1,2]$ definida por $g(x) = 2\,f(x) - f(1)$

Prove que a função g tem pelo menos um zero.

10

De uma função g, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- 1 é zero de g;
- $g(3) > 0$.

Prove que a equação $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,3[$

15

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$.

(a) Mostre que $f(x) = 10$ tem pelo menos uma solução em $]4,5[$.

(b) Mostre que $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-3,0[$

(c) Prove que f toma o valor -1 pelo menos uma vez no intervalo $]0,3[$

16

Seja f uma função contínua, de domínio $[0,5]$ e contradomínio $[3,4]$. Seja g a função, de domínio $[0,5]$, definida por $g(x) = f(x) - x$.

Prove que a função g tem, pelo menos, um zero.

17

De uma função g, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- 1 é zero de g;
- $g(3) > 0$.

Prove que a equação $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,3[$.