



Canguru sem fronteiras 2005

Categoria: Estudante

Duração: 1h30mn

Destinatários: alunos do 12º ano de Escolaridade

Não podes usar calculadora. Há apenas uma resposta correcta em cada questão. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão errada, és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontuação!

Problemas de 3 pontos

- Para qual dos seguintes valores de x é menor o valor da expressão $\frac{x^2}{x^3}$?
 (A) 2 (B) 1 (C) -1 (D) -2 (E) -3
- Quantos números compreendidos entre 2 e 100 são iguais ao cubo de um número inteiro?
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
- Cinco cartões, numerados de 1 a 5, são colocados segundo a ordem ilustrada na figura. Sabendo que os cartões apenas podem ser movimentados trocando dois deles entre si, descobre o número mínimo de movimentos necessários para ordenar os cartões por ordem crescente.

1	3	5	4	2
---	---	---	---	---

 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
- Se $888 \times 111 = 2(2n)^2$ e n for um número inteiro positivo, então n é igual a
 (A) 8 (B) 11 (C) 22 (D) 111 (E) 444
- Estão oito cangurus colocados nos quadrados da tabela, como mostra a figura. Cada canguru pode saltar directamente do seu quadrado para qualquer quadrado vazio. Descobre o menor número de cangurus que devem saltar de modo a que em cada linha e em cada coluna fiquem exactamente 2 cangurus.

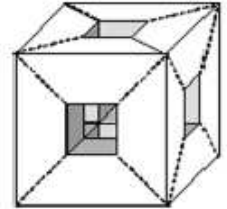
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
- Um quadrado de papel foi cortado em três partes. Duas delas são
 Qual é a forma da terceira parte?
 (A) (B) (C) (D) (E)

7. A soma de quatro números inteiros positivos consecutivos nunca pode ser igual a

- (A) 2002 (B) 22 (C) 202 (D) 222 (E) 220

8. Um cubo de dimensões $3 \times 3 \times 3$ pesa 810 gramas. Se o perfurarmos de um extremo ao outro, como mostra a figura, fazendo três buracos cada um dos quais com a forma de um paralelepípedo rectangular de dimensões $1 \times 1 \times 3$, o peso do sólido resultante é

- (A) 540 g (B) 570 g (C) 600 g (D) 630 g (E) 660 g

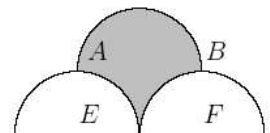


9. Se f for uma função que satisfaz a igualdade $f(n + 1) = 2f(n) - 2002$ para todo o número inteiro n e $f(2005) = 2008$, então $f(2004)$ é igual a

- (A) 2004 (B) 2005 (C) 2008 (D) 2010 (E) 2016

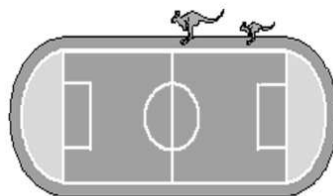
10. Na figura estão representadas 3 semi-circunferências. $[ABEF]$ é um rectângulo e os pontos E e F são os centros das duas semi-circunferências inferiores. Se o raio de cada uma das semi-circunferências for 2 cm , então a área, em cm^2 , da região a sombreado é:

- (A) 8 (B) 7 (C) 2π (D) $2\pi + 1$ (E) $2\pi + 2$



Problemas de 4 pontos

11. Uma mãe canguru e o seu filho Saltador estão a saltar à volta de um estádio com perímetro de 330 m . Cada um deles dá um salto por segundo. Cada salto da mãe tem 5 m de comprimento e cada salto do filho tem 2 m de comprimento. Os dois começam a saltar ao mesmo tempo no mesmo ponto do estádio e movem-se na mesma direcção.



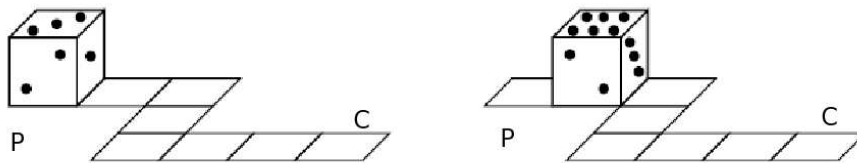
Passados 25 segundos, o Saltador fica cansado e pára, enquanto que a sua mãe continua a saltar. Ao fim de quanto tempo é que a mãe encontra de novo o Saltador?

- (A) 15 s (B) 24 s (C) 40 s (D) 51 s (E) 66 s

12. A Anita está a pintar cada uma das faces de vários cubos de madeira de branco ou preto, usando ambas as cores em cada um dos cubos. De quantas maneiras diferentes é que ela pode pintar os cubos?

- (A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 52 (E) 64

13. A soma das pintas em faces opostas de um dado vale sempre 7. Um dado roda segundo o circuito representado na figura.



No ponto de partida (P), a face do topo tem 3 pintas. Quantas pintas terá a face do topo do dado quando este estiver no ponto de chegada (C)?

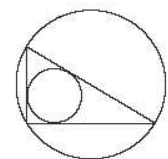
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

14. Uma caixa contém 60 cartões: alguns são vermelhos, outros azuis e os restantes são brancos. Se todos os cartões vermelhos fossem substituídos por cartões azuis, então o número de cartões azuis seria o dobro do número de cartões brancos; mas se todos os cartões brancos fossem substituídos por cartões azuis, então o número de cartões azuis seria o triplo do número de cartões vermelhos. O número de cartões azuis na caixa é

- (A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

15. Sejam a e b as medidas de comprimento dos catetos do triângulo rectângulo da figura. Se d for o diâmetro do incírculo e D for o diâmetro do circuncírculo desse triângulo, então $d + D$ é igual a

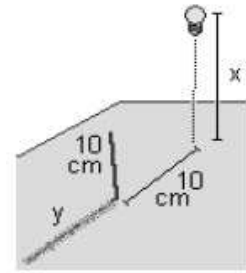
- (A) $a + b$ (B) $2(a + b)$ (C) $0.5(a + b)$ (D) \sqrt{ab} (E) $\sqrt{a^2 + b^2}$



16. Seja M o conjunto de todos os números reais x para os quais se verifica a desigualdade $2^{4^x} < 4^{2^x}$. Então $M =$

- (A) $] - \infty, 1[$ (B) $]0, 1[$ (C) $] - \infty, 1[\cup]1, +\infty[$ (D) $]0, +\infty[$ (E) \mathbb{R}

17. Uma lâmpada eléctrica move-se verticalmente, começando a subir a partir de uma altura inicial de 10 cm acima do tampo de uma mesa. Um lápis de 10 cm de comprimento é colocado verticalmente na mesa a uma distância de 10 cm da lâmpada projectando-se assim uma sombra na mesa, como mostra a figura. Qual é o gráfico do comprimento y da sombra (em centímetros) em função da altura x (em centímetros) da lâmpada relativamente ao tampo da mesa?

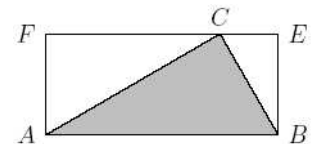


- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E)

18. Duas garrafas de igual volume contêm, em simultâneo, água e sumo. A razão entre o volume de água e de sumo é 2:1 e 4:1, respectivamente. Se misturarmos o conteúdo das duas garrafas numa garrafa maior, então a razão entre a água e o sumo nessa garrafa será:

- (A) 3:1 (B) 6:1 (C) 11:4 (D) 5:1 (E) 8:1

19. O diagrama mostra um rectângulo $[ABEF]$ e um triângulo $[ABC]$. Sabemos que $\widehat{ACF} = \widehat{CBE}$. Se $\overline{FC} = 6$ e $\overline{CE} = 2$, então a área de $[ABC]$ é



- (A) 12 (B) 16 (C) $8\sqrt{2}$ (D) $8\sqrt{3}$ (E) outro valor.

20. Dia sim, dia não, o Júlio fala a verdade. Nos restantes dias mente sempre. Hoje ele proferiu quatro das seguintes frases. Qual das seguintes frases é que ele não pode ter dito hoje?

- (A) Eu tenho um número primo de amigos.
 (B) Eu tenho tantos amigos rapazes como raparigas.
 (C) 288 é divisível por 12.
 (D) Eu falo sempre a verdade.
 (E) Três dos meus amigos são mais velhos do que eu.

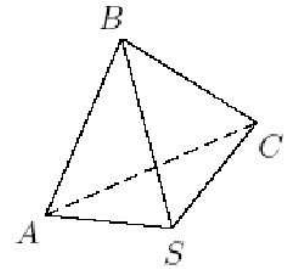
Problemas de 5 pontos

21. Qual dos seguintes números pode ser expresso como um produto de quatro números inteiros diferentes, cada um dos quais superior a 1.

- (A) 625 (B) 124 (C) 108 (D) 2187 (E) 2025

22. Na pirâmide $[SABC]$ a amplitude de todos os ângulos planos com vértice S é 90° . A medida das áreas das faces laterais $[SAB]$, $[SAC]$ e $[SBC]$ é 3, 4 e 6, respectivamente. Qual é volume de $[SABC]$?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 12



23. Se a soma dos algarismos de m for 30, então a soma dos algarismos de $m + 3$ não pode ser

- (A) 6 (B) 15 (C) 21 (D) 24 (E) 33

24. Num saco temos 17 bolas numeradas de acordo com a regra $5 + 125k$, $k = 0, \dots, 16$, isto é, 5, 130, 255, 380, 505, \dots 1755, 1880, 2005. Se escolhermos aleatoriamente algumas bolas, qual é o menor número de bolas necessárias para garantir que, entre as escolhidas, se encontre pelo menos um par de bolas cuja soma seja superior a 2010?

- (A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 17

25. Sabendo que $\log_{10}(\sqrt{2005} + \sqrt{1995}) = n$, qual dos seguintes valores é o de

$$\log_{10}(\sqrt{2005} - \sqrt{1995})?$$

- (A) $n - 1$ (B) $1 - n$ (C) $\frac{1}{n}$ (D) $n + 1$

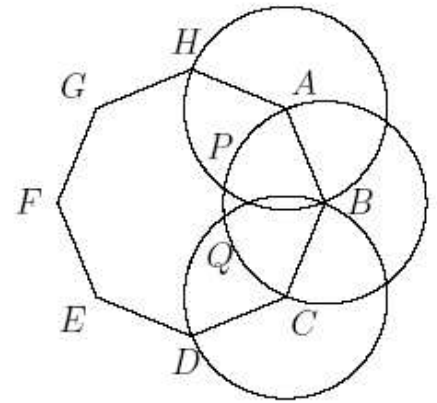
(E) Impossível de determinar apenas com a informação dada.

26. O inteiro a tem exactamente dois divisores. O inteiro b tem exactamente cinco divisores. Quantos divisores tem o número ab ?

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 10

(E) Não é possível determinar sem informação adicional.

27. Na figura, $[ABCDEFGH]$ é um octógono regular de lado 1. O ponto P é o ponto interior do octógono que resulta da intersecção das circunferências de centros em A e B e de raio 1. O ponto Q é o ponto interior do octógono que resulta da intersecção das circunferências de centros em B e C e de raio 1. Qual a amplitude de $\angle APQ$?

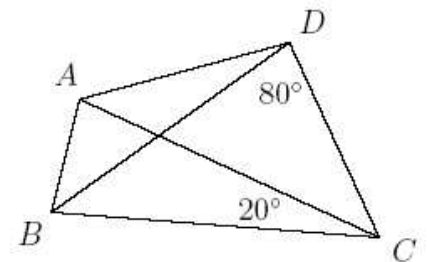


- (A) $\frac{19}{24}\pi$ (B) $\frac{8}{11}\pi$ (C) $\frac{5}{8}\pi$ (D) $\frac{3}{4}\pi$ (E) $\frac{7}{9}\pi$

28. O António pensou num número, duplicou-o e depois subtraiu 1. Aplicou este processo mais 98 vezes (começando em cada uma dessas vezes com o resultado obtido anteriormente) até obter $2^{100} + 1$. Qual foi o número em que o António pensou inicialmente?

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) Nenhum dos números anteriores.

29. No quadrilátero $[ABCD]$ a diagonal $[BD]$ é a bissetriz de $\angle ABC$ e $\overline{AC} = \overline{BC}$. Sabendo que $\widehat{BDC} = 80^\circ$ e $\widehat{ACB} = 20^\circ$, a amplitude de $\angle BAD$ é igual a



- (A) 90° (B) 100° (C) 110° (D) 120° (E) 135°

30. O Jorge tem de viajar de A para B e pensa fazê-lo a uma certa velocidade. Ele gostaria de chegar mais cedo do que o planeado e notou que, viajando a uma velocidade de mais 5 km/h do que a que tinha pensado inicialmente chegaria 5 horas mais cedo e que viajando a uma velocidade de mais 10 km/h do que a que tinha planeado chegaria 8 horas mais cedo. A velocidade planeada por ele é

- (A) 10 km/h (B) 15 km/h (C) 20 km/h
 (D) 25 km/h (E) Impossível determinar.