SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
Delegação Regional do Centro

Canguru Matemático sem fronteiras 2008

Categoria: Estudante **Duração: 1h30min**
Destinatários: alunos do 12º ano de Escolaridade

Não podes usar calculadora. Há apenas uma resposta correcta em cada questão. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão errada, és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

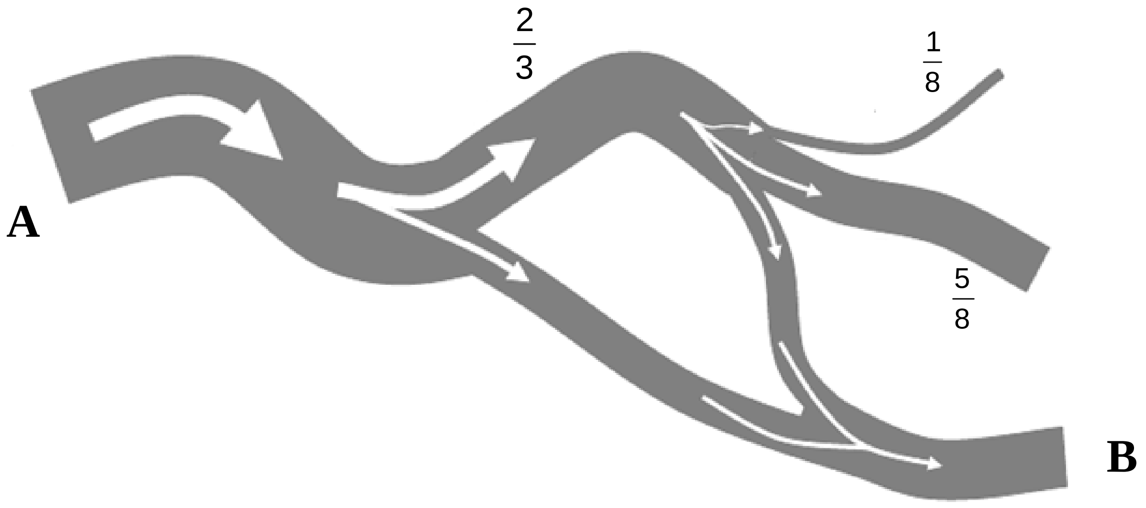
1. O João escreveu os números 3, 4 e mais dois números desconhecidos na tabela de 2 × 2 casas. Sabe-se que as somas dos números nas linhas são 5 e 10 e a soma dos números de uma das colunas é igual a 9. O maior dos números desconhecidos é:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 3

2. Se $x + y = 0$ e $x \neq 0$, então $\dfrac{x^{2008}}{y^{2008}} =$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2^{2008} E) x/y

3. A nascente de um rio está identificada pelo ponto A da figura. Após um trajecto inicial, o rio ramifica-se em dois. O leito da primeira ramificação fica com 2/3 do caudal inicial e a segunda ramificação fica com o resto do caudal. Posteriormente, a primeira ramificação divide-se em três partes, uma parte leva 1/8 do caudal da ramificação, a segunda parte fica com 5/8 do caudal e a terceira parte fica com o resto. Mais tarde, esta terceira parte junta-se de novo a um ramo do rio. A figura abaixo descreve esta situação. Qual é a fracção da água da nascente que atravessa o ponto B?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

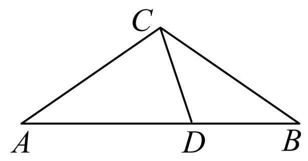
4. Quantos números primos p existem de modo a que $p^4 + 1$ também seja um número primo?

A) Nenhum B) 1 C) 2 D) 3 E) Uma infinidade deles

5. Uma tabela contém 21 colunas numeradas de 1 a 21 e 33 linhas numeradas de 1 a 33. Apagamos as linhas cujos números não são múltiplos de 3 e também as colunas cujo número é par. Quantas casas da tabela original é que restam?

A) 110 B) 121 C) 115,5 D) 119 E) 242

6. Considera o triângulo isósceles $[ABC]$ ($\overline{CA}=\overline{CB}$). O ponto D pertence ao lado $[AB]$ e é tal que $\overline{AD}=\overline{AC}$ e $\overline{DB}=\overline{DC}$ (ver a figura). Qual é a medida da amplitude de $\angle ACB$?



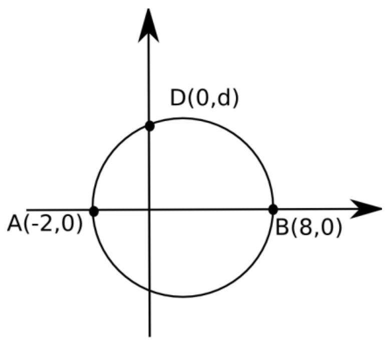
A) 98° B) 100° C) 104°

D) 108° E) 110°

7. O valor máximo da função f definida por $f(x)=|5\sin x-3|, x\in\mathbb{R},$ é:

A) 2 B) 3 C) π D) 5π E) 8

8. A figura mostra-nos uma circunferência de diâmetro $\overline{AB}$. O ponto D de coordenadas *(0,d)* pertence à circunferência. Qual o valor de *d?*



A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) 4

D) 5 E) 6

9. Os cinco pontos diferentes A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 foram colocados por esta ordem numa recta (as distâncias entre os pontos poderão ser diferentes). Colocou-se um outro ponto P na mesma recta de modo que a soma $\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}$ seja mínima. Então o ponto P é:

A) A_1 B) A_2 C) A_3

D) Qualquer ponto entre A_2 e A_4 E) Qualquer ponto entre A_1 e A_5

10. A Rita quer colocar dois algarismos nos espaços livres de **2 _ _ 8** de modo que o número obtido seja divisível por 3. Quantas possibilidades existem?

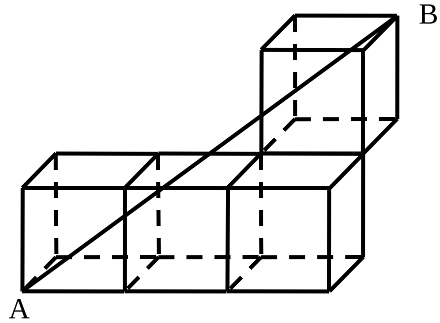
A) 29 B) 30 C) 19 D) 20 E) 33

Problemas de 4 pontos

11. O Gonçalo agrupou seis dos seguintes números –9 ; 0 ; –5 ; 5 ; –4 ; –1 ; –3 em grupos de dois de modo a que a soma dos números de cada grupo seja a mesma. Neste processo houve um número que ficou de fora, qual foi esse número?

A) 5 B) 0 C) –3 D) –4 E) –5

12. Os cubos da figura têm medida de aresta 1. Qual a medida do comprimento do segmento $[AB]$?



A) $\sqrt{17}$ B) 7 C) $\sqrt{13}$

D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{14}$

13. Numa Competição Matemática são propostos cinco problemas. Uma vez que os problemas têm diferentes níveis de dificuldade, não existem dois problemas com a mesma pontuação (a pontuação é sempre atribuída em números inteiros não negativos). O Ivo resolveu correctamente os cinco problemas e obteve um total de 10 pontos pelos dois problemas de menor pontuação e obteve 18 pontos pelos dois problemas de maior pontuação. Qual foi a pontuação total do Ivo?

A) 30 B) 32 C) 34 D) 35 E) 40

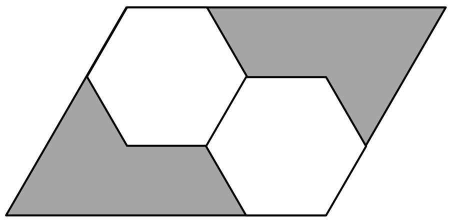
14. A Susana pintou 36 cangurus usando três cores diferentes: 25 cangurus contêm a cor amarela, 28 cangurus contêm castanho e 20 cangurus contêm a cor preta. Apenas 5 dos cangurus têm as três cores. Quantos cangurus é que a Susana pintou com apenas uma cor?

A) Nenhum B) 4 C) 12 D) 31 E) Impossível determinar

15. Uma caixa contém sete cartas. As cartas estão numeradas de 1 a 7. A Ana tira, ao acaso, três cartas da caixa e depois o Pedro tira, ao acaso, duas cartas. Ficam duas cartas na caixa. Depois a Ana diz ao Pedro com toda a certeza: "Eu sei que a soma dos números das tuas cartas é um número par. " Então, a soma dos números das cartas da Ana é igual a:

A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 E) 15

16. Os dois hexágonos regulares na figura são geometricamente iguais e têm um lado em comum. Qual é a fracção da área do paralelogramo que está a sombreado?



A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3

D) 2/5 E) 5/12

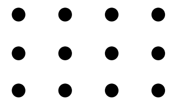
17. O numerador e o denominador de uma fracção são números inteiros negativos. O numerador é maior que o denominador em uma unidade. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) A fracção é um número menor do que -1
B) A fracção é um número entre -1 e 0
C) A fracção é um número positivo e menor do que 1
D) A fracção é um número maior do que 1
E) Não é possível determinar se a fracção é um número positivo ou negativo

18. Suponhamos que $x^2y\,z^3 = 7^3$ e que $x\,y^2 = 7^9$. Então $xyz =$

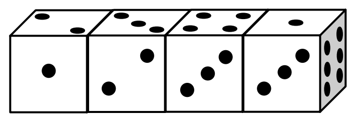
A) 7^4 B) 7^6 C) 7^8 D) 7^9 E) 7^{10}

19. Escolhem-se aleatoriamente três pontos da grelha da figura.
Qual é a probabilidade de eles serem colineares?



A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{12}$

20. Quatro dados idênticos estão dispostos em linha (ver figura). Cada dado tem faces com 1, 2, 3, 4, 5 e 6 pontos, mas os dados não são dados usuais: a soma dos pontos em faces opostas não é necessariamente igual a 7. Qual é a soma dos pontos das 6 faces que se tocam?



A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Problemas de 5 pontos

21. As medidas do comprimento, da altura e da largura de um bloco (paralelepípedo rectangular) em centímetros são números inteiros e formam uma progressão geométrica de razão $R=2$. Qual dos seguintes valores pode representar o volume do sólido?

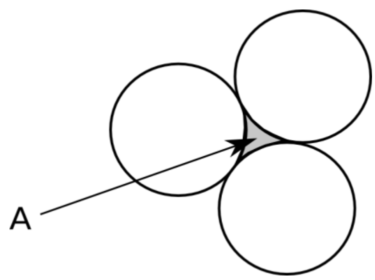
A) 120 cm^3 B) 188 cm^3 C) 216 cm^3 D) 350 cm^3 E) 500 cm^3

22. Na figura estão representadas três circunferências de raio r. Sabendo que as circunferências são tangentes, a medida da área da região A é:

A) $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\pi\right)r^2$ B) $\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$

C) $\frac{1}{8}\pi\, r^2$ D) $\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)\pi\, r^2$

E) $\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$



23. Na figura, cada asterisco representa um algarismo. A soma dos algarismos do produto é igual a:

A) 16 B) 20 C) 26

D) 30 E) Outra resposta

```
      * * *
    × 1 * *
  ---------
    2 2 * *
    9 0 *
  * * 2
  ---------
  5 6 * * *
```

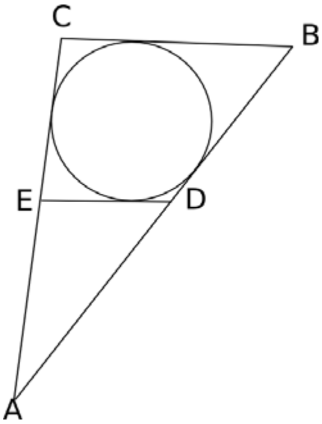
24. Qual é o valor da expressão $x^2+y^2+z^2$, se $x+y+z=1$ e $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$=0?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Impossível determinar

25. O primeiro elemento de uma sucessão é $a_1=0$. Para $n\geq 1$, temos $a_{n+1}=a_n+(-1)^n\times n$. Se $a_k=2008$, então o valor de k é:

A) 2008 B) 2009 C) 4017 D) 4018 E) Outro valor

26. Uma circunferência está inscrita no triângulo$[ABC]$, como mostra a figura ao lado. Sabemos que $\overline{AC}=5$, $\overline{AB}=6$ e $\overline{BC}=3$. O segmento $[ED]$ é tangente à circunferência.

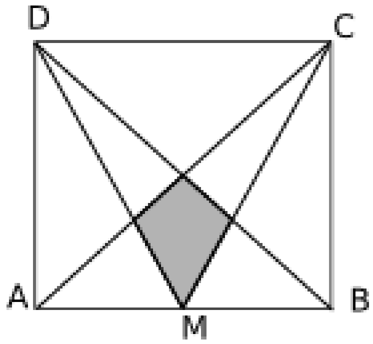


Então, o perímetro do triângulo $[ADE]$ é:

A) 7 B) 4 C) 9

D) 6 E) 8

27. Considera o quadrado $[ABCD]$ da figura com medida de lado 1. O ponto M é o ponto médio do segmento $[AB]$.



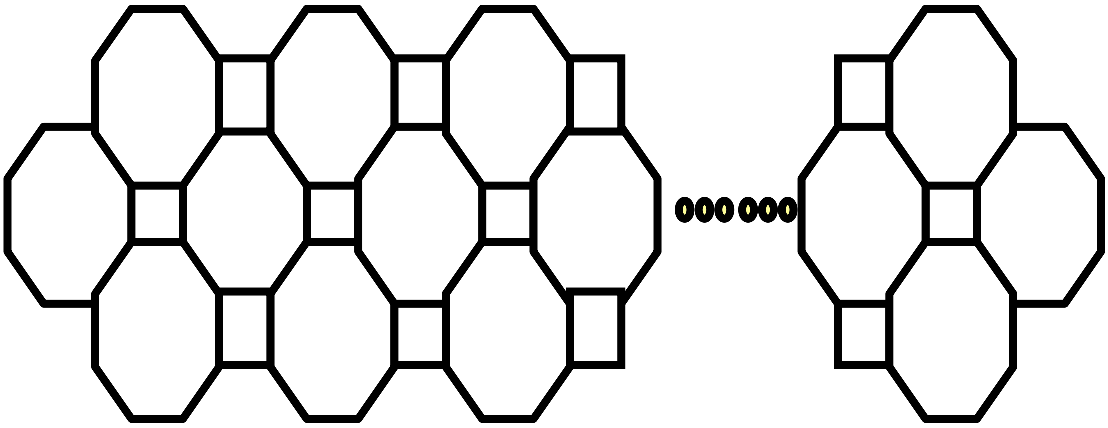
A área da região a sombreado é igual a:

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{2}{13}$

28. O número $3^{32}-1$ tem exactamente dois divisores que são maiores do que 75 e menores do que 85. Qual é o produto desses dois divisores?

A) 5852 B) 6560 C) 6804 D) 6888 E) 6972

29. O António usou fósforos para construir o objecto da figura. Existem 61 octógonos. Quantos fósforos é que o António usou?



A) 488 B) 400 C) 328 D) 244 E) 446

30. Se $\operatorname{sen} x + \cos x = m$, então $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x =$

A) $1 - \frac{(1-m^2)^2}{2}$ B) $1 + \frac{(1-m^2)^2}{2}$ C) $\frac{1-(1-m^2)^2}{2}$

D) m^4 E) $m^4 + 1$