

Canguru Matemático sem Fronteiras 2009



Categoria: Estudante

Duração: 1h30min

Destinatários: alunos do 12º ano de Escolaridade

Nome: _____ Turma: _____

Não podes usar calculadora. Há apenas uma resposta correcta em cada questão. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão errada és penalizado em $1/4$ dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Existem 200 peixes num aquário, sendo 1% deles azuis e os restantes amarelos. Quantos peixes amarelos temos de tirar do aquário, de modo a que os peixes azuis representem 2% de todos os peixes?

- (A) 2 (B) 4 (C) 20 (D) 50 (E) 100

2. Qual é o maior dos números seguintes?

- (A) $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ (B) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{4} - \sqrt{3}$ (D) $\sqrt{5} - \sqrt{4}$ (E) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$

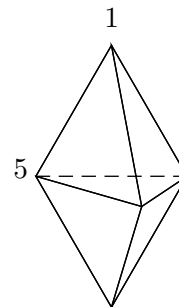
3. Para quantos números naturais n , o número da forma $n^2 + n$ é primo?

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) Um número finito, mas maior que 2
(E) Um número infinito

4. A Maria, a Joana e a Cristina foram a um café. Cada uma delas pediu três copos de sumo, dois gelados e cinco bolinhos. A Maria pagou a conta final. Qual dos seguintes valores poderia ter sido o valor da conta?

- (A) 39,20 € (B) 38,20 € (C) 37,20 € (D) 36,20 € (E) 35,20 €

5. A figura mostra um sólido formado por 6 faces triangulares. Em cada vértice existe um número. Para cada face consideramos a soma dos três números dos vértices dessa face. Se todas as somas forem iguais e dois dos números forem 1 e 5 como indicado na figura, qual é a soma de todos os 5 números?



- (A) 9 (B) 12 (C) 17 (D) 18 (E) 24

6. A circunferência $f(F; 13)$, de centro em F e raio 13, intersecta a circunferência $g(G; 15)$, de centro em G e raio 15, nos pontos P e Q . A medida do comprimento do segmento de recta $[PQ]$ é 24. Qual dos seguintes valores pode ser a medida do comprimento do segmento $[FG]$?

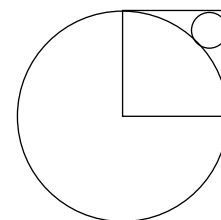
- (A) 2 (B) 5 (C) 9 (D) 14 (E) 18

7. Uma caixa contém 2 meias brancas, 3 meias vermelhas e 4 meias azuis. A Liliana sabe que um terço das meias têm um buraco mas não sabe a cor delas. Ela tira aleatoriamente meias da caixa, na esperança de encontrar duas meias da mesma cor e sem buracos. Quantas meias tem ela que tirar da caixa para ter a certeza que cumpre o seu objectivo?

- (A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 8

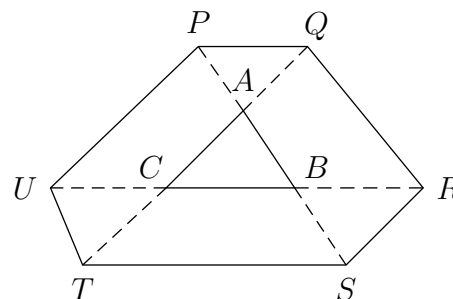
8. O lado do quadrado na figura mede 1. Então a medida do raio do círculo mais pequeno é igual a:

- (A) $\sqrt{2} - 1$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $(1 - \sqrt{2})^2$



9. Os lados do triângulo $[ABC]$ foram prolongados até aos pontos P, Q, R, S, T e U , de tal forma que $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{BS}$, $\overline{TC} = \overline{CA} = \overline{AQ}$ e $\overline{UC} = \overline{CB} = \overline{BR}$. Se a medida da área de $[ABC]$ é 1, qual é a medida da área do hexágono $[PQRSTU]$?

- (A) 9 (B) 10 (C) 12
(D) 13 (E) Não há informação suficiente



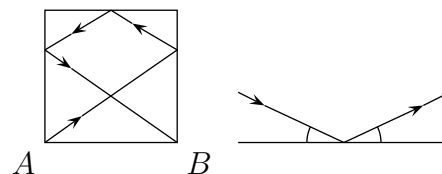
10. Pretendemos colorir os quadrados da tabela usando as cores A , B , C e D , de tal forma que os quadrados vizinhos não tenham a mesma cor (os quadrados que partilham pelo menos um vértice são considerados vizinhos). Alguns dos quadrados foram coloridos como se mostra na figura. Quais são as possibilidades de colorir o quadrado a sombreado?

A	B			
C	D			
		B		
B				

- (A) A ou B (B) Apenas C (C) Apenas D
 (D) C ou D (E) Qualquer uma de A , B , C ou D

Problemas de 4 pontos

11. Numa mesa de bilhar, com a forma de um quadrado com medida de lado igual a 2 m, é jogada uma bola a partir do canto A . Depois de tocar em três lados, como mostra a figura, vai para o canto B . Quantos metros percorreu a bola? (Lembra-te que a bola se desvia com o mesmo ângulo com que incide, como mostra a figura à direita.)

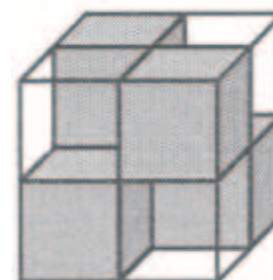


- (A) 7 (B) $2\sqrt{13}$ (C) 8 (D) $4\sqrt{3}$ (E) $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

12. De 2009 cangurus, cada um deles de cor ou clara ou escura, compararam-se as suas alturas. Sabe-se que um canguru claro é mais alto do que exactamente 8 cangurus escuros, um outro canguru claro é mais alto do que exactamente 9 cangurus escuros, um outro canguru claro é mais alto do que exactamente 10 cangurus escuros, e assim sucessivamente, até que exactamente um outro canguru claro é mais alto do que todos os cangurus escuros. Qual é o número de cangurus claros?

- (A) 1000 (B) 1001 (C) 1002
 (D) 1003 (E) A situação é impossível

13. Um cubo com medida de lado 2 é constituído por quatro cubos transparentes com medida de lado 1 e quatro cubos escuros, não-transparentes, com medida de lado 1 (conforme a figura). Eles estão colocados de forma a que o cubo grande não seja transparente, o que significa não ser possível ver através dele, nem de cima para baixo, nem de frente para trás e nem mesmo a partir da esquerda para a direita. No mínimo, quantos cubos unitários escuros seriam necessários colocar dentro de um cubo grande com medida de lado 3 de forma a que este não seja transparente?



- (A) 6 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 18

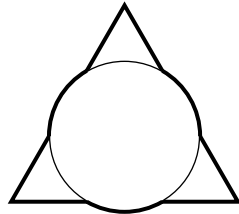
14. Na ilha dos honestos e mentirosos estão 25 pessoas numa fila. Todos, com exceção da primeira pessoa da fila, dizem que a pessoa à sua frente na fila é mentirosa e o primeiro indivíduo da fila diz que todas as pessoas que estão atrás de si são mentirosas. Quantos mentirosos existem na fila? (Os honestos dizem sempre a verdade e os mentirosos mentem sempre.)

- (A) 0
- (B) 12
- (C) 13
- (D) 24
- (E) Impossível determinar

15. Qual é o último algarismo do número $1^2 - 2^2 + \dots - 2008^2 + 2009^2$?

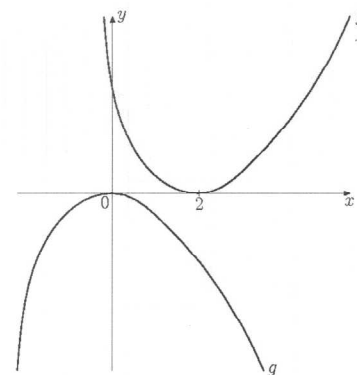
- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

16. Sobreposmos um círculo de raio 1 a um triângulo equilátero com medida de lado 3 e fazendo coincidir os centros das duas figuras. Qual é a medida do perímetro da figura que obtemos?



- (A) $3 + 2\pi$
- (B) $6 + \pi$
- (C) $9 + \frac{\pi}{3}$
- (D) 3π
- (E) $9 + \pi$

17. Os gráficos das funções reais f e g estão representados na figura. Qual é a relação entre f e g ?

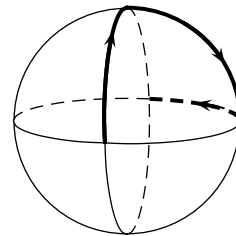


- (A) $g(x) = f(x + 2)$
- (B) $g(x - 2) = -f(x)$
- (C) $g(x) = -f(-x + 2)$
- (D) $g(-x) = -f(-x + 2)$
- (E) $g(2 - x) = -f(x)$

18. Foram propostos quatro problemas a cada um dos 100 participantes nas Olimpíadas de Matemática. 90 participantes resolveram o primeiro problema, 85 participantes resolveram o segundo problema, 80 participantes resolveram o terceiro problema e 70 participantes resolveram o quarto problema. Qual é o menor número possível de participantes que resolveram os quatro problemas?

- (A) 10
- (B) 15
- (C) 20
- (D) 25
- (E) 30

19. Três arcos circulares são unidos por forma a intersectarem-se segundo ângulos rectos, como mostra a figura. Uma joaninha aterra numa intersecção e rasteja em torno do arco como se segue: ela viaja ao longo de um quarto de círculo, vira à direita 90° , viaja ao longo de um quarto de círculo e vira à esquerda 90° . Procedendo desta forma, quantos quartos de círculo viajará ela até reencontrar pela primeira vez o ponto de partida?



- (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

20. Temos de preencher uma tabela quadrangular 3×3 com números reais, de tal forma que a soma dos elementos em cada linha, coluna e diagonal seja a mesma. Dois dos números estão na figura. Qual é o número que representa a ?

a		
		47
	63	

- (A) 16 (B) 51 (C) 54
(D) 55 (E) 110

Problemas de 5 pontos

21. Dois atletas A e B estão a correr à volta de um estádio circular. Cada um deles corre sempre à mesma velocidade e sem parar. O atleta A corre mais rápido do que o atleta B e demora 3 minutos a dar uma volta ao estádio. Os atletas A e B partem juntos e 8 minutos depois A alcança B pela primeira vez. Quanto tempo demora B a dar uma volta ao estádio?

- (A) 6 min (B) 8 min (C) 4 min 30 s
(D) 4 min 48 s (E) 4 min 20 s

22. Seja z um número com 8 algarismos e todos não nulos. Quantos números existem com a forma de z e que sejam divisíveis por 9?

- (A) $\frac{z}{8}$ (B) $\frac{z}{3}$ (C) $\frac{z}{9}$ (D) $\frac{8z}{9}$ (E) $\frac{7z}{8}$

23. Quantos números naturais de 10 algarismos existem, compostos só por 1, 2 e 3, em que cada dois algarismos vizinhos diferem de uma unidade?

- (A) 16 (B) 32 (C) 64 (D) 80 (E) 100

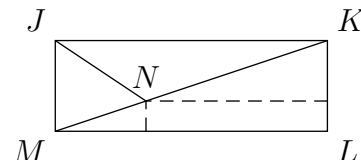
24. Para quantos números inteiros $n \geq 3$ existe um polígono convexo (não tem nenhum ângulo interno com medida de amplitude maior do que 180°) com n lados, cujos ângulos estão na razão $1 : 2 : \dots : n$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 5 (E) Mais do que 5

25. 55 alunos participaram nas Olimpíadas de Matemática. Ao corrigir as provas, o júri marcou cada um dos problemas com “+”, se o problema estiver certo, ou com “-”, se o problema estiver errado, ou com “0”, se o aluno não respondeu à questão. Mais tarde verificou-se que não havia duas provas com o mesmo número de “+” e “-”. No mínimo, quantos problemas tinha o enunciado da prova?

- (A) 6 (B) 9 (C) 10
(D) 11 (E) 12

26. Num rectângulo $[JKLM]$, a bissetriz de $\angle KJM$ intersecta a diagonal $[KM]$ no ponto N . As distâncias entre N e os lados $[LM]$ e $[KL]$ são 1 e 8, respectivamente. Então \overline{LM} é igual a:



- (A) $8 + 2\sqrt{2}$ (B) $11 - \sqrt{2}$ (C) 10 (D) $8 + 3\sqrt{2}$ (E) $11 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

27. Se $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$, quantos valores pode k tomar?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

28. Os números 1; 2; 3; ...; 99 são distribuídos por n grupos sob as condições:

1. cada número está num, e num só, grupo;
2. existem pelo menos dois números em cada grupo;
3. se dois números estiverem no mesmo grupo, então a sua soma não é divisível por 3.

O menor dos números naturais n com esta propriedade é igual a:

- (A) 3 (B) 9 (C) 33 (D) 34 (E) 66

29. A Sandra e as suas três irmãs vão ao teatro. Elas têm um camarote com 4 lugares. A Sandra e duas das suas irmãs chegaram mais cedo e cada uma delas sentou-se aleatoriamente num dos quatro lugares. Qual é a probabilidade da Sandra ter de se mudar quando a sua irmã mais nova, Maria, chegar e insistir em se sentar no lugar que lhe estava destinado assim como qualquer das suas irmãs no caso de terem que se levantar?

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{6}$

30. A sucessão de números inteiros a_n é definida por: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$ para $n \geq 0$. O resto da divisão de a_{2009} por 7 é:

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) 6