



# Canguru Matemático sem Fronteiras 2011

<http://www.mat.uc.pt/canguru/>

Categoria: Júnior

Duração: 1h30min

Destinatários: alunos dos 10.º e 11.º anos de escolaridade

Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

**Não podes usar calculadora.** Há apenas uma resposta correcta em cada questão. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correcta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em  $1/4$  dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

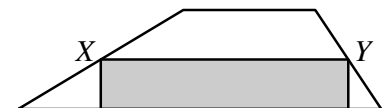
## Problemas de 3 pontos

1. Uma passadeira tem faixas pretas e brancas alternadas, cada uma com 50 cm de largura. Qual é o comprimento de uma passadeira que tem 8 faixas brancas e começa e termina com uma faixa branca?

(A) 7 m                      (B) 7,5 m                      (C) 8 m                      (D) 8,5 m                      (E) 9 m

2. A área do rectângulo sombreado é  $13 \text{ cm}^2$  e  $X$  e  $Y$  são os pontos médios dos lados do trapézio. Qual é a área do trapézio?

(A)  $24 \text{ cm}^2$                       (B)  $25 \text{ cm}^2$                       (C)  $26 \text{ cm}^2$   
(D)  $27 \text{ cm}^2$                       (E)  $28 \text{ cm}^2$



3. O resto da divisão de 2011 por um certo número inteiro é igual a 1011. Então

(A) o divisor é 100                      (B) o divisor é 500  
(C) o divisor é 1000                      (D) o divisor é outro número inteiro  
(E) não é possível obter este resto

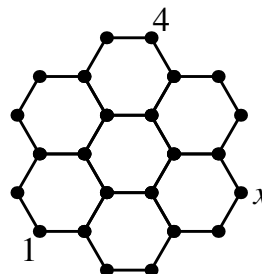


DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

4. Sabendo que  $P = 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5$ ,  $Q = 2^2 + 3^2 + 4^2$  e  $R = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4$ , qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A)  $Q < P < R$  (B)  $P < Q = R$  (C)  $P < Q < R$  (D)  $R < Q < P$  (E)  $Q = P < R$

5. Em cada um dos pontos da figura pretendemos escrever um número de tal modo que a soma dos dois números colocados nas extremidades de cada um dos segmentos marcados seja igual para todos os segmentos. Dois dos números já se encontram escritos. Qual é o valor de  $x$ ?



- (A) 1 (B) 3  
 (C) 4 (D) 5  
 (E) É necessária mais informação

6. O Miguel, o Fernando e o Sebastião participaram numa corrida. Imediatamente após o início da corrida o Miguel ia em primeiro, o Fernando em segundo e o Sebastião em terceiro. Durante a corrida o Miguel e o Fernando trocaram de lugares, entre si, 9 vezes, o Fernando e o Sebastião trocaram 10 vezes e o Miguel e o Sebastião 11 vezes. Por que ordem terminaram a corrida?

- (A) Miguel, Fernando e Sebastião (B) Fernando, Sebastião e Miguel  
 (C) Sebastião, Miguel e Fernando (D) Sebastião, Fernando e Miguel  
 (E) Fernando, Miguel e Sebastião

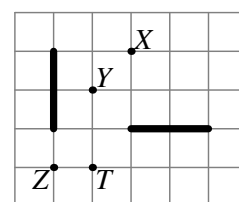
7. Um painel rectangular com área igual a  $360 \text{ cm}^2$  é constituído por azulejos quadrados, todos com o mesmo tamanho. O painel tem  $24 \text{ cm}$  de altura e tem 5 azulejos de largura. Qual é a área de cada azulejo?

- (A)  $1 \text{ cm}^2$  (B)  $4 \text{ cm}^2$  (C)  $9 \text{ cm}^2$  (D)  $16 \text{ cm}^2$  (E)  $25 \text{ cm}^2$

8. Os números de quatro algarismos, cuja soma dos algarismos é 4, estão escritos por ordem decrescente. Em que posição da lista está o número 2011?

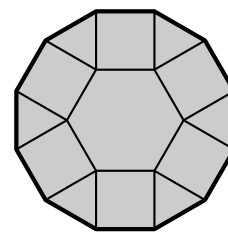
- (A) 6.<sup>a</sup> (B) 7.<sup>a</sup> (C) 8.<sup>a</sup> (D) 9.<sup>a</sup> (E) 10.<sup>a</sup>

9. Cada um dos dois segmentos representados pode ser obtido por uma rotação do outro. Qual dos pontos assinalados pode ser o centro de uma tal rotação?



- (A) Só o  $X$  e o  $T$  (B) Só o  $X$   
 (C) Só o  $X$  e o  $Z$  (D) Só o  $T$  (E)  $X, Y, Z$  e  $T$

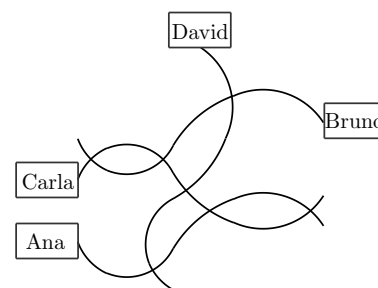
10. Na figura está representado um polígono constituído por um hexágono regular, cujo lado mede 1 cm, seis triângulos e seis quadrados. Qual é o perímetro desse polígono?



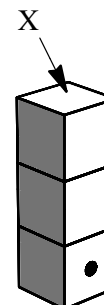
- (A)  $6(1 + \sqrt{2})$  cm      (B)  $6\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  cm  
 (C) 12 cm                      (D)  $6 + 3\sqrt{2}$  cm              (E) 9 cm

### Problemas de 4 pontos

11. Durante uma viagem de barco com o mar muito agitado a Joana tentou desenhar um mapa da sua aldeia. Conseguiu desenhar as quatro ruas com os seus sete cruzamentos e as casas dos seus amigos, mas de forma pouco precisa. Na realidade, a Rua da Seta, a Rua da Régua e a Rua do Prego são em linha recta. A quarta rua é a Rua Sinuosa. Quem vive na Rua Sinuosa?



- (A) Ana                              (B) Bruno  
 (C) Carla                          (D) David  
 (E) É necessário um mapa melhor para se poder responder
12. A Susana colou três dados normais como se representa na figura. Em qualquer dado, o número total de pintas em cada par de faces opostas é 7. A construção foi feita de modo a que a soma das pintas em cada par de faces coladas seja 5. Quantas pintas estão na face marcada com X?

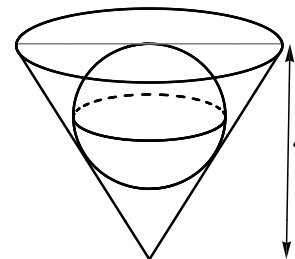


- (A) 2                              (B) 3                              (C) 4  
 (D) 5                              (E) 6
13. Sabendo que um certo mês tem 5 segundas-feiras, 5 terças-feiras e 5 quartas-feiras e que o mês anterior tinha tido só 4 domingos, o que podemos dizer sobre o mês seguinte?
- (A) Tem exactamente 4 sextas-feiras                      (B) Tem exactamente 4 sábados  
 (C) Tem 5 domingos    (D) Tem 5 quartas-feiras  
 (E) Esta situação é impossível
14. Se  $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$ , qual é o valor de  $n$ ?
- (A) 1005                          (B) 1006                          (C) 2010                          (D) 2011  
 (E) Nenhum destes valores

15. A Maria tem uma caixa cúbica vermelha e uma caixa cúbica azul cujas arestas medem  $a$  dm e  $(a + 1)$  dm, respectivamente. A caixa azul está cheia de água e a vermelha está vazia. A Maria encheu a caixa vermelha com água da caixa azul e ainda sobraram 217 litros de água na caixa azul. Quanto litros de água foram despejados para a caixa vermelha?

- (A) 243                      (B) 512                      (C) 125                      (D) 1331                      (E) 729

16. Uma bola de raio igual a 15 mm caiu num buraco de forma cônica de base circular e ficou completamente encaixada, como se pode ver no esquema da figura. Neste esquema, a secção do cone determinada por um plano que passe pelo centro da bola e pelo vértice do cone é um triângulo equilátero. Qual é a profundidade do buraco?



- (A)  $30\sqrt{2}$  mm                      (B)  $25\sqrt{3}$  mm  
 (C) 45 mm                      (D) 60 mm  
 (E)  $60(\sqrt{3} - 1)$  mm

17. Cada uma das quadrículas da tabela  $4 \times 4$  tem de ser pintada de vermelho ou de preto. O número que está em cada linha ou coluna indica o número de quadrículas dessa linha ou coluna que devem ser pintadas de preto. De quantas maneiras diferentes podemos colorir a tabela?

				2
				0
				1
				1
2	0	1	1	

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 3  
 (D) 5                      (E) 9

18. Qual é o número máximo de números naturais consecutivos de 3 algarismos com pelo menos um dos algarismos ímpar?

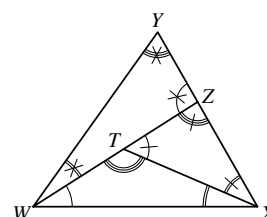
- (A) 1                      (B) 10                      (C) 110                      (D) 111                      (E) 221

19. O Pedro quer preencher uma tabela  $3 \times 3$  com números naturais de tal forma que a soma dos números de qualquer quadrado  $2 \times 2$  seja igual a 10. Encontrando-se já colocados os cinco números indicados na figura, qual é a soma dos quatro números que faltam?

1		0
	2	
4		3

- (A) 9                      (B) 10                      (C) 11  
 (D) 12                      (E) 13

20. É possível construir um triângulo  $[WXY]$ , escolher um ponto  $Z$  no segmento  $[XY]$ , distinto de  $X$  e de  $Y$ , e depois escolher um ponto  $T$  no segmento  $[WZ]$ , distinto de  $W$  e  $Z$ , (ver a figura) de modo a que as amplitudes dos nove ângulos marcados tomem o menor número possível de valores distintos. Qual é esse número?

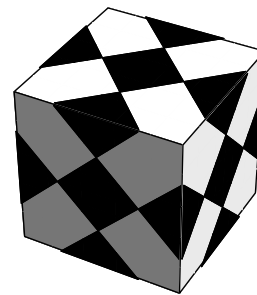


- (A) 2                      (B) 3                      (C) 4  
 (D) 5                      (E) 6

## Problemas de 5 pontos

21. O Simão tem um cubo cujas arestas medem 1 dm e decidiu pintar o cubo com quadrados pretos geometricamente iguais, como se pode ver na figura, de modo a que todas as faces fiquem iguais. Qual é a área da região que ficou a preto?

- (A)  $37,5 \text{ cm}^2$       (B)  $150 \text{ cm}^2$       (C)  $225 \text{ cm}^2$   
 (D)  $300 \text{ cm}^2$       (E)  $375 \text{ cm}^2$



22. Um número natural diz-se “simpático” se tiver 5 algarismos distintos e o primeiro algarismo for igual à soma dos outros 4 algarismos. Quantos números “simpáticos” existem?

- (A) 72                      (B) 144                      (C) 168                      (D) 216                      (E) 288

23. Os números naturais  $x$  e  $y$  são maiores do que 1. Qual das seguintes fracções tem o maior valor?

- (A)  $\frac{x}{y-1}$                       (B)  $\frac{x}{y+1}$                       (C)  $\frac{2x}{2y+1}$                       (D)  $\frac{2x}{2y-1}$                       (E)  $\frac{3x}{3y+1}$

24. Um tetraedro regular  $[WXYZ]$  tem a face  $[WXY]$  num plano  $\mathcal{P}$ . A aresta  $[XY]$  está na recta  $\ell$ . Um outro tetraedro regular  $[XYZT]$  partilha uma face com  $[WXYZ]$ . Onde é que a recta que passa pelos pontos  $Z$  e  $T$  intersecta  $\mathcal{P}$ ?

- (A) No mesmo lado de  $\ell$  que  $W$ , dentro de  $[WXY]$   
 (B) No mesmo lado de  $\ell$  que  $W$ , fora de  $[WXY]$   
 (C) No lado oposto de  $\ell$  em relação a  $W$   
 (D) A recta que passa pelos pontos  $Z$  e  $T$  não intersecta o plano  $\mathcal{P}$   
 (E) A resposta depende do comprimento das arestas dos tetraedros

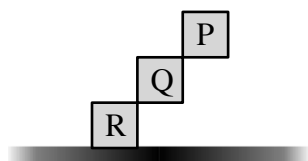
25. Quantos pares ordenados de números naturais  $(x, y)$  satisfazem a condição  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ ?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) 4

26. Para cada número natural  $n \geq 2$ , denotamos por  $\langle n \rangle$  o maior número primo que não excede  $n$ . Quantos números naturais  $k$  satisfazem a condição  $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$ ?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) Mais de 3

27. O Paulo está a jogar um jogo no computador que envolve quadrados e que começa na situação representada na figura.



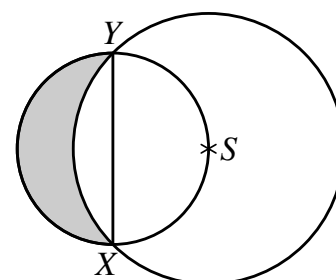
Em cada jogada, cada quadrado pode ser rodado segundo um ângulo de amplitude de 90 graus com centro num dos vértices. Encontra-se exemplificadas duas possíveis jogadas.



O objectivo é colocar os quadrados alinhados na parte inferior do ecrã. Das situações seguintes, a qual é possível o Paulo chegar?

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E) Todas as hipóteses anteriores são possíveis

28. O João desenhou duas circunferências como se pode ver na figura. A circunferência de menor raio tem diâmetro  $\overline{XY}$  e passa pelo centro  $S$  da circunferência de maior raio. Se o raio da circunferência de centro  $S$  for  $r$ , qual é a medida da área da região a cinzento?



- (A)  $\frac{\pi}{6}r^2$
- (B)  $\frac{1}{2}r^2$
- (C)  $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}r^2$
- (D)  $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$
- (E) Outra resposta

29. Quantos conjuntos constituídos por quatro arestas de um cubo têm a propriedade de duas quaisquer arestas desse conjunto não terem vértices em comum?

- (A) 6
- (B) 8
- (C) 9
- (D) 12
- (E) 18

30. Para que valores de  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots, 8$ , é possível colorir algumas quadrículas de uma tabela de dimensões  $5 \times 5$  de modo a que qualquer tabela de dimensões  $3 \times 3$  contenha exactamente  $n$  quadrículas coloridas?

- (A) 1
- (B) 1 e 2
- (C) 1, 2 e 3
- (D) 1, 2, 7 e 8
- (E) Todos os possíveis valores de  $n$