

Canguru Matemático sem Fronteiras 2012

<http://www.mat.uc.pt/canguru/>

Categoria: Júnior

Duração: 1h 30min

Destinatários: alunos dos 10.º e 11.º anos de escolaridade

Nome: _____ Turma: _____

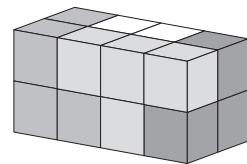
Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em $1/4$ dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

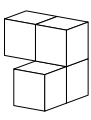
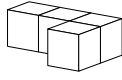
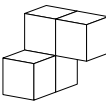
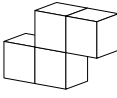
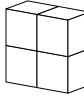
Problemas de 3 pontos

1. A expressão $11,11 - 1,111$ representa o número:

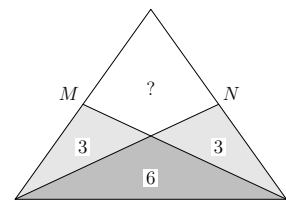
- (A) 9,009 (B) 9,0909 (C) 9,99 (D) 9,999 (E) 10

2. Um paralelepípedo é construído com quatro peças, como se mostra na figura. Cada uma dessas quatro peças foi construída colando, face com face, quatro cubos da mesma cor. Qual é a forma da peça branca?



- (A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

3. O triângulo da figura é isósceles e os pontos M e N são os pontos médios dos lados que têm o mesmo comprimento. Unindo cada um dos pontos M e N com o vértice que lhe é oposto dividiu-se o triângulo em quatro regiões, três das quais têm 3 cm^2 , 3 cm^2 e 6 cm^2 de área, como assinalado na figura. Qual é a área da quarta região?



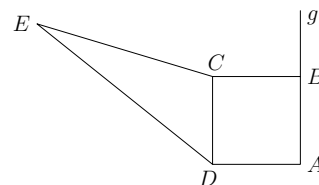
- (A) 3 cm^2 (B) 4 cm^2 (C) 5 cm^2 (D) 6 cm^2 (E) 7 cm^2

4. Quando o António quer enviar uma mensagem à Beatriz usa o seguinte sistema de encriptação, que é do conhecimento da Beatriz. Primeiro, cada letra da mensagem é substituída por um número natural entre 1 e 26, fazendo $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, ..., $Z = 26$. De seguida, cada um desses números é substituído pelo seu dobro, adicionado de 9 unidades. Essa sequência de números é então enviada à Beatriz. Esta manhã a Beatriz recebeu a sequência $25 - 39 - 29 - 18$. Qual era a mensagem original?

- (A) HORA (B) HINO (C) HOJE (D) HAJA
(E) É impossível saber, porque o António cometeu um erro



5. O quadrado $[ABCD]$, representado na figura, tem 4 cm de lado e a sua área é igual à do triângulo $[CED]$. Qual é a distância do ponto E à reta g , que contém o lado $[AB]$ do quadrado?



- (A) 8 cm (B) $(4 + 2\sqrt{3})$ cm (C) 12 cm
 (D) $10\sqrt{2}$ cm (E) Não é possível calcular

6. A soma dos sete algarismos de um número é 6. Qual é o produto desses algarismos?

- (A) 0 (B) 5 (C) 6
 (D) 7 (E) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$

7. Num triângulo retângulo $[ABC]$ unem-se os pontos médios de cada um dos lados originando um novo triângulo $[LMN]$. Sabendo que os catetos do triângulo $[ABC]$ medem 8 cm e 6 cm, qual é o perímetro do triângulo $[LMN]$?

- (A) 10 cm (B) 12 cm (C) 15 cm (D) 20 cm (E) 24 cm

8. Em quatro das expressões numéricas seguintes, substituindo cada algarismo 8 por um mesmo número inteiro positivo qualquer, obtém-se uma expressão que representa o mesmo número que a expressão original. Qual das cinco expressões não tem esta propriedade?

- (A) $(8 + 8 - 8) : 8$ (B) $8 + (8 : 8) - 8$ (C) $8 : (8 + 8 + 8)$
 (D) $8 \times (8 : 8) : 8$ (E) $8 - (8 : 8) + 8$

9. Dois dos lados de um quadrilátero medem 1 cm e 4 cm. Uma das diagonais deste quadrilátero divide-o em dois triângulos isósceles e mede 2 cm. Qual é o perímetro do quadrilátero?

- (A) 8 cm (B) 9 cm (C) 10 cm (D) 11 cm (E) 12 cm

10. O resto da divisão de cada um dos números 144 e 220 pelo número natural n é 11. Qual é o valor de n ?

- (A) 7 (B) 11 (C) 15 (D) 19 (E) 38

Problemas de 4 pontos

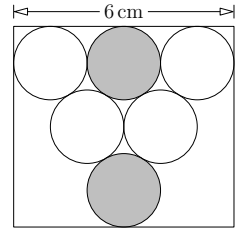
11. Um cilindro está em cima de uma mesa e um cubo está no chão. A base superior do cilindro está 80 cm acima da face superior do cubo. Quando se coloca o cubo em cima da mesma mesa e o cilindro no chão, a face superior do cubo fica 1 m acima da base superior do cilindro. Qual é a altura da mesa?

- (A) 20 cm (B) 80 cm (C) 90 cm (D) 100 cm (E) 120 cm

12. A Maria e o Dinis combinaram lançar uma moeda várias vezes e trocar caramelos um com o outro de acordo com as regras: se o resultado de um lançamento da moeda for “cara”, a Maria vence esse lançamento e recebe dois caramelos do Dinis; se o resultado de um lançamento da moeda for “coroa”, o Dinis vence esse lançamento e recebe três caramelos da Maria. Após 30 lançamentos o número de caramelos de cada um deles é igual ao seu número inicial de caramelos. Em quantos lançamentos foi Dinis o vencedor?

- (A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 24 (E) 30

13. Seis círculos de igual raio estão dispostos no interior de um retângulo, como mostra a figura. Cada dois círculos que se interessem são apenas tangentes e os pontos onde os lados do retângulo interessem os círculos são pontos de tangência. Além disso, o lado do retângulo que é tangente a três dos círculos mede 6 cm. Qual é a distância entre os círculos cinzentos?

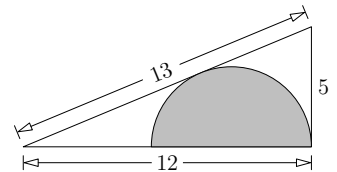


- (A) 1 cm (B) $\sqrt{2}$ cm (C) $\frac{\pi}{2}$ cm (D) 2 cm (E) $(2\sqrt{3} - 2)$ cm

14. No quarto do Bruno há quatro relógios. Um dos relógios está errado por 2 minutos, outro por 3 minutos, outro por 4 minutos e o outro por 5 minutos. Num certo instante o Bruno repara que os relógios marcam 14h 54min, 14h 57min, 15h 02min e 15h 03min. Que horas são nesse instante?

- (A) 14h 57min (B) 14h 58min (C) 14h 59min (D) 15h (E) 15h 01min

15. O triângulo da figura é retângulo e os seus lados medem 5 cm, 12 cm e 13 cm, conforme indicado. Qual é o raio do semicírculo inscrito representado na figura?



- (A) $\frac{7}{3}$ cm (B) $\frac{10}{3}$ cm (C) 4 cm (D) $\frac{13}{3}$ cm (E) $\frac{17}{3}$ cm

16. Quantos são os números naturais de quatro algarismos em que o algarismo das centenas é igual a 3 e a soma dos restantes três algarismos também é igual a 3?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

17. A Luísa quer escrever 12 números, escolhidos de 1 a 9, nas células de uma tabela 4×3 , de tal modo que a soma dos números de cada linha é a mesma para todas as linhas e a soma dos números de cada coluna é a mesma para todas as colunas. A Luísa já escreveu alguns dos números, como indicado na figura. Que número deve ela escrever na célula sombreada?

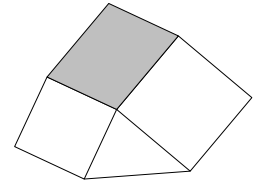
2	4		2
	3	3	
6		1	

- (A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

18. Três atletas, o Marco, o Nuno e o Orlando, fizeram uma corrida entre eles. Antes da corrida, quatro amigos fizeram afirmações sobre a ordem de chegada dos três atletas. O primeiro disse: “Ou o Marco ou o Nuno ficará em primeiro”. O segundo disse: “Se o Nuno ficar em segundo então o Orlando será o primeiro”. O terceiro disse: “Se o Nuno ficar em terceiro então o Marco não será o primeiro”. O quarto disse: “Ou o Nuno ou o Orlando ficará em segundo”. No final da corrida, os quatro amigos verificaram que as quatro afirmações eram verdadeiras. Por que ordem chegaram os três corredores?

- (A) Marco, Nuno, Orlando (B) Marco, Orlando, Nuno (C) Orlando, Nuno, Marco
 (D) Nuno, Marco, Orlando (E) Nuno, Orlando, Marco

19. Na figura está representada uma forma plana construída a partir de dois quadrados, cujos lados medem 4 cm e 5 cm, de um triângulo com 8 cm² de área e de um paralelogramo que se encontra sombreado. Qual é a área do paralelogramo?



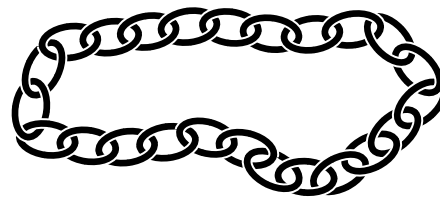
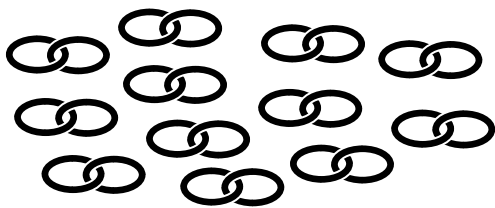
- (A) 15 cm² (B) 16 cm² (C) 18 cm² (D) 20 cm² (E) 21 cm²

20. Para m e k inteiros positivos tem-se $m^m(m^k - k) = 2012$. Qual é o valor de k ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 9 (E) 11

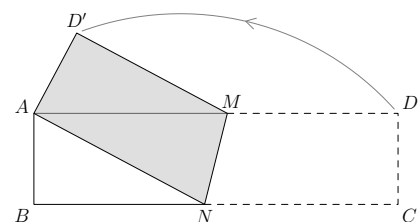
Problemas de 5 pontos

21. Um ourives tem 12 peças de uma corrente, cada uma com dois elos. Para fazer um colar fechado a partir destas peças, como o representado na figura, qual é o número mínimo de elos que o ourives tem de abrir e voltar a fechar?



- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

22. A tira retangular de papel $[ABCD]$ de dimensões 4 cm \times 16 cm, representada na figura, é dobrada ao longo da reta MN de modo a que os vértices A e C fiquem sobrepostos. Qual é a área do pentágono $[ABNMD']$?



- (A) 17 cm² (B) 27 cm² (C) 37 cm² (D) 47 cm² (E) 57 cm²

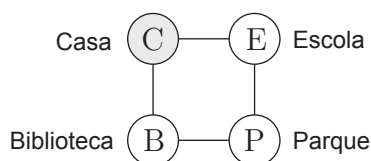
23. Dois comboios, um de mercadorias e outro de passageiros, deslocam-se com velocidades constantes. O comboio de passageiros demora 8 segundos a passar por um marco na linha. De seguida, os dois comboios encontram-se demorando 9 segundos a cruzar-se. Posteriormente, o comboio de mercadorias demora 12 segundos a passar pelo mesmo marco. Qual das afirmações seguintes, relativas aos comprimentos dos dois comboios, é verdadeira?

- (A) O comboio de passageiros tem o dobro do comprimento do comboio de mercadorias
- (B) Os dois comboios têm o mesmo comprimento
- (C) O comboio de mercadorias é 50% mais comprido do que o comboio de passageiros
- (D) O comboio de mercadorias tem o dobro do comprimento do comboio de passageiros
- (E) Nada pode ser deduzido sobre os comprimentos dos comboios

24. O último algarismo diferente de zero do número $2^{59} \times 3^4 \times 5^{53}$ é

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 6
- (E) 9

25. O Pedro criou um jogo para ser jogado no tabuleiro representado na figura. O jogo inicia-se com o Canguru na posição E, Escola, e termina quando o Canguru chega à posição C, Casa. Cada jogada consiste em deslocar o Canguru de uma posição para uma posição adjacente, exceto se ele estiver na posição C (fim do jogo). De quantas maneiras pode o Canguru fazer exatamente 13 jogadas para ir da posição Escola até à posição Casa?



- (A) 12
- (B) 32
- (C) 64
- (D) 144
- (E) 1024

26. Num dispositivo elétrico há cinco lâmpadas, cada uma com um interruptor que admite duas posições: “ligado” e “desligado”. Altera-se o estado de uma lâmpada acendendo-a ou apagando-a por ação do interruptor correspondente. Cada vez que o estado de uma qualquer das cinco lâmpadas é alterado, por ser acionado o interruptor correspondente, também o estado de uma das outras quatro lâmpadas, escolhida aleatoriamente em cada ação, é alterado. Inicialmente todas as lâmpadas estavam apagadas e foram executadas 10 operações de alteração de posição dos interruptores. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) É impossível que todas as lâmpadas estejam apagadas
- (B) É forçoso que todas as lâmpadas estejam acesas
- (C) É impossível que todas as lâmpadas estejam acesas
- (D) É forçoso que todas as lâmpadas estejam apagadas
- (E) Nenhuma das afirmações (A) a (D) é verdadeira

27. São dados seis inteiros positivos diferentes e sabe-se que apenas um dos pares que se podem formar com quaisquer dois destes seis números tem a característica de o maior dos dois números do par não ser múltiplo do outro. Qual é o menor valor possível para o maior dos seis inteiros?

- (A) 18 (B) 20 (C) 24 (D) 36 (E) 45

28. O Luís escreveu todos os inteiros positivos com três algarismos e, para cada um deles, escreveu também o produto dos seus algarismos. A seguir calculou a soma de todos esses produtos. Que número deve o Luís ter obtido?

- (A) 45 (B) 45^2 (C) 45^3 (D) 2^{45} (E) 3^{45}

29. Os números de 1 a 120 foram escritos em 15 linhas como representado na figura. Para que coluna, a contar da esquerda, é que a soma dos inteiros nela escritos é maior?

1							...	
2	3						...	
4	5	6					...	
7	8	9	10				...	
11	12	13	14	15			...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
106	107	108	109	110	111	112	...	120

- (A) 1.^a (B) 5.^a (C) 7.^a (D) 10.^a (E) 13.^a

30. Designem-se por A, B, C, D, E, F, G, H os 8 vértices de um octógono convexo, dispostos por essa ordem. Escolhe-se aleatoriamente um dos vértices C, D, E, F, G ou H e traça-se o segmento de reta que o une ao vértice A . De seguida escolhe-se aleatoriamente um dos vértices C, D, E, F, G ou H e traça-se o segmento de reta que o une ao vértice B . Qual é a probabilidade de o octógono ficar dividido em exatamente três regiões por estes dois segmentos de reta?

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{18}$ (E) $\frac{1}{3}$