



Canguru Matemático sem Fronteiras 2013

<http://www.mat.uc.pt/canguru/>

Categoria: Estudante
Destinatários: alunos dos 12.º ano de escolaridade

Duração: 1h 30min

Nome: _____ Turma: _____

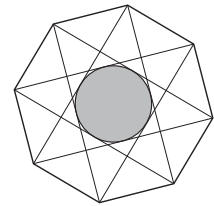
Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em $1/4$ dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Dos números seguintes, qual é o maior?

- (A) 2013 (B) 2^{0+13} (C) 20^{13} (D) 201^3 (E) 20×13

2. Os lados do maior octógono regular da figura medem 10 cm. Qual é o raio do círculo inscrito no octógono definido pelas diagonais do octógono maior, representadas na figura?



- (A) 10 cm (B) 7,5 cm (C) 5 cm (D) 2,5 cm (E) 2 cm

3. Quantas arestas tem um prisma com 2013 faces?

- (A) 2011 (B) 2013 (C) 4022 (D) 4024 (E) 6033

4. A que é igual a raiz cúbica de 3^{3^3} ?

- (A) 3^3 (B) 3^{3^3-1} (C) 3^{2^3} (D) 3^{3^2} (E) $(\sqrt{3})^3$

5. O ano de 2013 tem a propriedade de o número que o representa ser formado por algarismos consecutivos: 0, 1, 2 e 3. Quantos anos passaram desde a última vez que um ano foi representado por um número formado por quatro algarismos consecutivos?

- (A) 467 (B) 527 (C) 581 (D) 693 (E) 990

6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim tal que $f(0) = 0$ e $f(2013) - f(2001) = 100$. Qual é o valor de $f(2031) - f(2013)$?

- (A) 75 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 180

7. Sabendo que $2 < x < 3$, quantas das afirmações seguintes são verdadeiras?

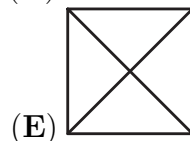
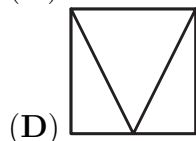
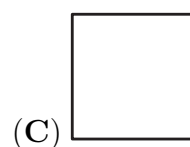
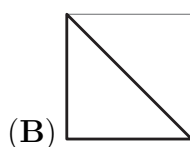
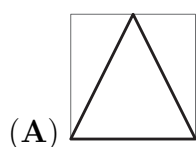
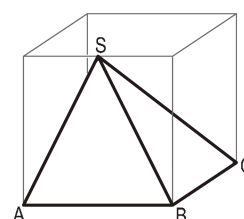
$$4 < x^2 < 9, \quad 4 < 2x < 9, \quad 6 < 3x < 9, \quad 0 < x^2 - 2x < 3.$$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

8. Seis super-heróis capturaram vinte vilões. O primeiro super-herói capturou um vilão, o segundo capturou dois vilões e o terceiro capturou três vilões. O quarto super-herói capturou mais vilões do que qualquer um dos outros cinco super-heróis. Qual é o menor número de vilões que o quarto super-herói pode ter capturado?

- (A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

9. No interior do cubo transparente da figura está uma pirâmide opaca, $[ABCD S]$, cuja base, $[ABCD]$, coincide com uma face do cubo e cujo vértice, S , é o ponto médio de uma aresta do cubo. Quando se olha para esta pirâmide, através das seis faces do cubo, de cima, de baixo, de frente, de trás, da esquerda e da direita, a vista que não surge é

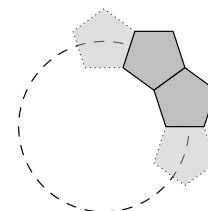


10. Quando uma certa substância sólida derrete, o seu volume aumenta $\frac{1}{12}$. Quando a substância volta a solidificar em quanto diminui o seu volume?

- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{13}$ (E) $\frac{1}{14}$

Problemas de 4 pontos

11. A Ana tem várias peças idênticas, com a forma de um pentágono regular, e cola as peças face com face de modo a completar um aro circular, como o representado na figura. Quantas peças tem o aro construído pela Ana?

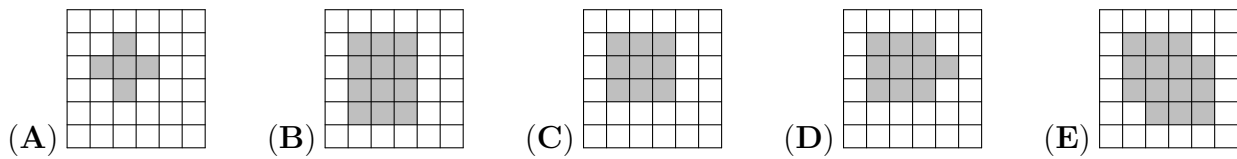


- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15

12. Quantos são os números inteiros positivos n tais que $\frac{n}{3}$ e $3n$ são números inteiros de três algarismos?

- (A) 12 (B) 33 (C) 34 (D) 100 (E) 300

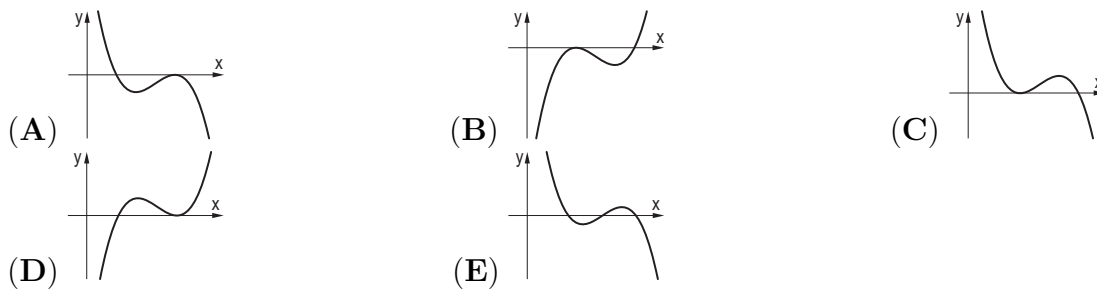
13. Um tapete circular foi colocado numa sala cujo chão é formado por mosaicos quadrados. Fez-se uma grelha em que cada mosaico é representado por um quadradinho cinzento ou branco consoante tem ou não mais do que um ponto em contacto com o tapete. Qual das seguintes não é uma possibilidade para a grelha obtida?



14. Considera a afirmação seguinte, feita sobre uma função, f , definida no conjunto dos números inteiros: “Para todo o x par, $f(x)$ é par.” Qual das seguintes é a negação da afirmação anterior?

- (A) Para todo o x par, $f(x)$ é ímpar
- (B) Para todo o x ímpar, $f(x)$ é par
- (C) Para todo o x ímpar, $f(x)$ é ímpar
- (D) Existe um número par, x , tal que $f(x)$ é ímpar
- (E) Existe um número ímpar, x , tal que $f(x)$ é ímpar

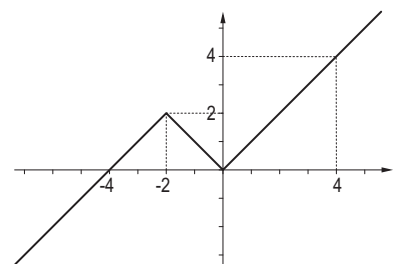
15. Seja W a função real de variável real definida por $W(x) = (a - x)(b - x)^2$, com $a < b$. O gráfico de W está representado numa das figuras seguintes. Em qual?



16. Um dos lados de um retângulo mede 5 cm. Este retângulo pode ser cortado de modo a originar um quadrado e outro retângulo, um dos quais tem 4 cm^2 de área. Quantos são os retângulos nestas condições?

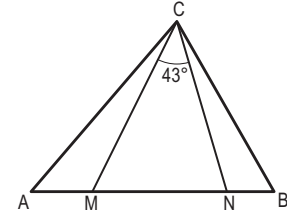
- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

17. O gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, composto por duas semirretas e um segmento de reta, encontra-se representado na figura. Quantas são as soluções da equação $f(f(f(x))) = 0$?



- (A) 4
- (B) 3
- (C) 2
- (D) 1
- (E) 0

18. No triângulo $[ABC]$ os pontos M e N , pertencentes ao lado $[AB]$, são tais que $\overline{AN} = \overline{AC}$ e $\overline{BM} = \overline{BC}$. Se $\widehat{MCN} = 43^\circ$ então \widehat{ACB} é igual a



- (A) 86° (B) 89° (C) 90° (D) 92° (E) 94°

19. Quantos pares, (x, y) , de números inteiros positivos verificam a equação $x^2y^3 = 6^{12}$?

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) Outro número

20. Uma caixa contém 900 cartões numerados de 100 a 999. Quaisquer dois cartões têm números diferentes. A Beatriz retira alguns cartões da caixa e, para cada cartão, calcula a soma dos algarismos nele representados. No mínimo, quantos cartões tem a Beatriz de retirar da caixa, para poder garantir que retira pelo menos três cartões com a mesma soma?

- (A) 51 (B) 52 (C) 53 (D) 54 (E) 55

Problemas de 5 pontos

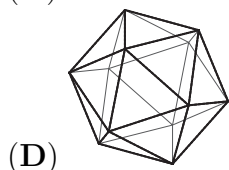
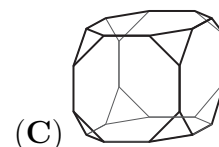
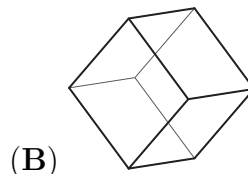
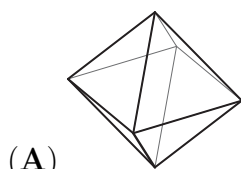
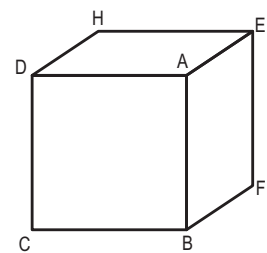
21. Quantos são os pares de números inteiros (x, y) , com $x \leq y$, tais que o produto dos dois inteiros é igual a cinco vezes a sua soma?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

22. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida pelas propriedades seguintes: f é periódica de período 5 e, para $x \in [-2, 3[$, tem-se $f(x) = x^2$. Qual é o valor de $f(2013)$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

23. Para cada vértice do cubo representado na figura considere-se o plano definido pelos três vértices que lhe são adjacentes. Por exemplo, para o vértice A considera-se o plano que é definido pelos vértices B , D e E . Quando o cubo é cortado por estes oito planos obtêm-se vários sólidos. Qual é o aspecto do sólido que contém o centro do cubo inicial?



- (E) O centro do cubo pertence a mais do que um sólido

24. Quantas soluções (x, y) , com x e y números reais, tem a equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

- (A) 1 (B) 5 (C) 8 (D) 9
(E) Uma infinidade

25. Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ a função definida por $f(n) = \frac{n}{2}$ se n é par e $f(n) = \frac{n-1}{2}$ se n é ímpar. Para k inteiro positivo, $f^k(n)$ representa o valor da expressão $f(f(\dots f(n)\dots))$, onde o símbolo f aparece k vezes. Por exemplo, $f^4(n)$ representa o valor de $f(f(f(f(n))))$. Qual é o número de soluções da equação $f^{2013}(n) = 1$?

- (A) 0 (B) 4026 (C) 2^{2012} (D) 2^{2013} (E) infinito

26. Num plano estão marcadas algumas retas. A reta a interseca exatamente 3 outras retas, a reta b interseca exatamente 4 outras retas e a reta c interseca exatamente n outras retas, com $n \neq 3$ e $n \neq 4$. Qual é o número de retas marcadas no plano?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
(E) Nenhum dos anteriores

27. A soma dos primeiros n números inteiros positivos é um número de três algarismos, sendo estes todos iguais. Qual é a soma dos algarismos de n ?

- (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

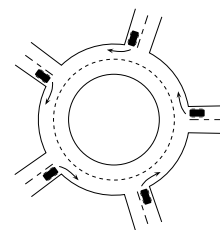
28. Numa ilha vivem apenas dois tipos de pessoas: as que dizem sempre a verdade e as que mentem sempre. Encontrei dois habitantes dessa ilha e perguntei ao mais alto se ambos diziam sempre a verdade. Ele respondeu-me, mas eu não consegui perceber se falava verdade ou mentia, por isso, perguntei ao mais baixo se o mais alto tinha dito a verdade. Ele respondeu-me, e com a sua resposta eu consegui perceber que tipo de habitante era cada um deles. Quem mentiu e quem disse a verdade?

- (A) Ambos disseram a verdade
(B) Ambos mentiram
(C) O mais alto disse a verdade e o mais baixo mentiu
(D) O mais alto mentiu e o mais baixo disse a verdade
(E) É impossível dizer

29. Uma sucessão de números reais, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, é tal que $a_1 = 1$ e, para quaisquer m e n números naturais, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$. O centésimo termo da sucessão, a_{100} , é

- (A) 100 (B) 1000 (C) 2013 (D) 4950 (E) 5050

30. Na rotunda representada na figura entram, ao mesmo tempo, cinco carros vindos de direções distintas. Cada um dos carros dá menos de uma volta à rotunda e não há dois que saiam na mesma direção. De quantas maneiras distintas pode isto acontecer?



- (A) 24 (B) 44 (C) 60 (D) 81 (E) 120