Canguru Matemático sem Fronteiras 2016

Categoria: Estudante — Duração: 1h 30min

Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: __________

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em $1/4$ dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

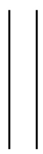
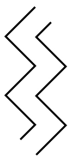
1. A soma das idades do Tomás e do João é 23 anos, a soma das idades do João e do Alexandre é 24 anos e a soma das idades do Tomás e do Alexandre é 25 anos. Qual é a idade do mais velho?

(A) 10 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13 **(E)** 14

2. A soma $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ é igual a:

(A) $\frac{3}{111}$ **(B)** $\frac{111}{1110}$ **(C)** $\frac{111}{1000}$ **(D)** $\frac{3}{1000}$ **(E)** $\frac{3}{1110}$

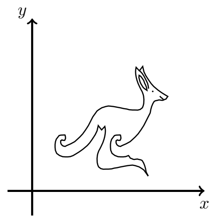
3. A Maria quer construir uma ponte sobre um rio e sabe que, qualquer que seja o ponto de uma das margens, o caminho mais curto que o liga à outra margem tem sempre o mesmo comprimento. Qual destas imagens não pode representar um tal rio?

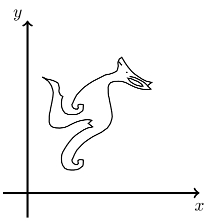
(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

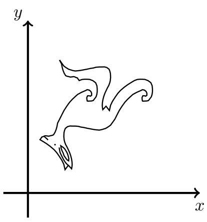
4. Quantos números inteiros são maiores do que 2015×2017 e menores do que 2016×2016?

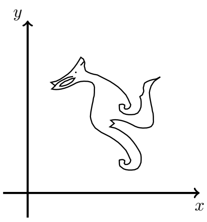
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2015 **(D)** 2016 **(E)** 2017

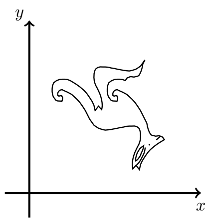
5. Na figura ao lado está representado um conjunto de pontos com a forma de um Canguru, num referencial cartesiano ortonormado xOy. As coordenadas x e y de cada ponto representado nessa figura foram trocadas. Qual foi o resultado?

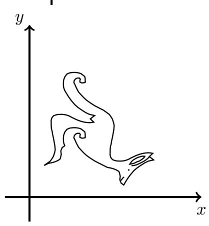


(A) 

(B) 

(C) 

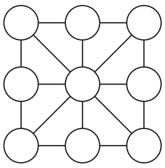
(D) 

(E) 

6. Qual é o menor número de planos necessários para delimitar uma região limitada do espaço tridimensional?

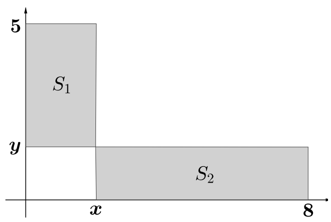
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

7. A Diana quer escrever nove números inteiros nos círculos do diagrama representado na figura ao lado, de modo a que a soma dos números nos vértices de cada um dos oito triângulos mais pequenos seja a mesma. Qual é o maior número possível de números inteiros diferentes que ela pode usar?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 5 (**E**) 8

8. Os retângulos S_1 e S_2 representados na figura à direita têm a mesma área. Qual é o valor de $\frac{x}{y}$?

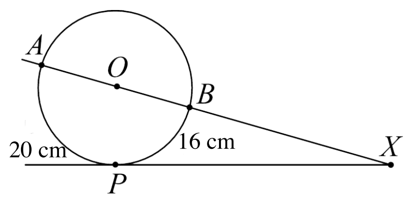


(**A**) 1 (**B**) $\frac{3}{2}$ (**C**) $\frac{4}{3}$ (**D**) $\frac{7}{4}$ (**E**) $\frac{8}{5}$

9. Se $x^2 - 4x + 2 = 0$, então $x + \frac{2}{x}$ é igual a:

(**A**) -4 (**B**) -2 (**C**) 0 (**D**) 2 (**E**) 4

10. Os comprimentos dos arcos AP e BP, indicados na figura, são 20 cm e 16 cm, respetivamente. Qual é a amplitude de $\angle AXP$?



(**A**) 30° (**B**) 24° (**C**) 18° (**D**) 15° (**E**) 10°

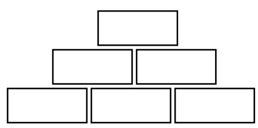
Problemas de 4 pontos

11. Os números naturais a, b, c e d verificam as igualdades $a + 2 = b - 2 = c \times 2 = d \div 2$. Qual dos números a, b, c ou d é o maior?

(**A**) a (**B**) b (**C**) c

(**D**) d (**E**) Não é possível saber

12. Nos retângulos que constituem a pirâmide da figura inscrevem-se números de forma a que o número em cada retângulo superior é o produto dos dois números nos retângulos imediatamente abaixo.
Qual dos seguintes números não pode aparecer no retângulo do topo da pirâmide, se nos três retângulos da base da pirâmide só estiverem números naturais maiores do que 1?



(**A**) 56 (**B**) 84 (**C**) 90 (**D**) 105 (**E**) 220

13. Qual é o valor de x_4, se $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ para $n \geq 1$?

(**A**) 2^{2^3} (**B**) 2^{2^4} (**C**) $2^{2^{11}}$ (**D**) $2^{2^{16}}$ (**E**) $2^{2^{768}}$

14. No retângulo $[ABCD]$, o comprimento do lado $[BC]$ é metade do comprimento da diagonal $[AC]$. Seja M um ponto em $[CD]$ tal que $\overline{AM} = \overline{MC}$. Qual é a amplitude de $\angle CAM$?

(**A**) 12,5° (**B**) 15° (**C**) 27,5° (**D**) 42,5° (**E**) É outro valor

15. A Sandra cortou um papel retangular, com medida de área igual a 2016, em 56 papéis quadrados geometricamente iguais. Os comprimentos dos lados do papel retangular e dos papéis quadrados são números inteiros. Para quantas formas retangulares diferentes do papel retangular é possível fazer isto?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 0

16. Na ilha dos cavaleiros e dos vilões, cada cidadão ou é cavaleiro e fala sempre a verdade, ou é vilão e mente sempre. Numa viagem pela ilha um visitante encontrou 7 pessoas sentadas em torno de uma fogueira e cada uma delas disse: "Eu estou sentado entre dois vilões!". Quantos vilões estavam sentados em torno da fogueira?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6

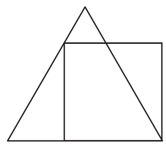
(**E**) É impossível saber

17. As equações $x^2 + ax + b = 0$ e $x^2 + bx + a = 0$ têm soluções reais. Sabe-se que a soma dos quadrados das soluções da primeira equação é igual à soma dos quadrados das soluções da segunda e que $a \neq b$. Qual é o valor de $a + b$?

(**A**) 0 (**B**) -2 (**C**) 4 (**D**) -4

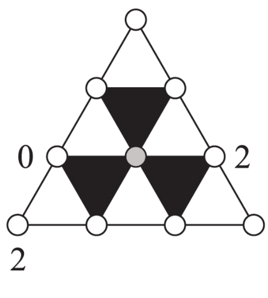
(**E**) É impossível determinar

18. O perímetro do quadrado na figura ao lado é igual a 4. Qual é o valor do perímetro do triângulo equilátero na figura?



(**A**) 4 (**B**) $3 + \sqrt{3}$ (**C**) 3 (**D**) $3 + \sqrt{2}$ (**E**) $4 + \sqrt{3}$

19. A cada um dos dez pequenos círculos na figura foi atribuído um dos números: 0, 1 ou 2. Sabemos que a soma dos números nos vértices de cada triângulo branco é divisível por 3, enquanto que a soma dos números nos vértices de cada triângulo preto não é divisível por 3. Três desses números já foram marcados na figura. Que números podem ser atribuídos ao círculo central a cinzento?

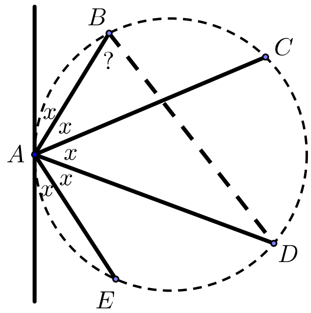


(**A**) Só pode ser o 0 (**B**) Só pode ser o 1

(**C**) Só pode ser o 2 (**D**) Tanto pode ser o 0 como o 1

(**E**) Tanto pode ser o 0, como o 1, como o 2

20. A Berta marcou cinco pontos A, B, C, D e E numa circunferência e desenhou a tangente à circunferência no ponto A, de tal modo que os cinco ângulos assinalados com x são geometricamente iguais (a figura não foi desenhada à escala). Qual é a amplitude de $\angle ABD$?



(**A**) 66° (**B**) 70,5°

(**C**) 72° (**D**) 75°

(**E**) 77,5°

21. Quantas soluções reais distintas tem a equação $\left(x^2 - 4x + 5\right)^{x^2+x-30} = 1$?

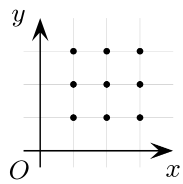
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3

(**D**) 4 (**E**) Um número infinito

22. Um quadrilátero contém uma circunferência inscrita (isto é, uma circunferência tangente aos quatro lados do quadrilátero). A razão entre o perímetro do quadrilátero e o da circunferência é $4 : 3$. Qual é a razão entre as medidas das áreas do quadrilátero e do círculo definido pela circunferência?

(**A**) $4 : \pi$ (**B**) $3\sqrt{2} : \pi$ (**C**) $16 : 9$ (**D**) $\pi : 3$ (**E**) $4 : 3$

23. Num referencial cartesiano ortonormado xOy, quantas funções quadráticas em x, distintas, têm um gráfico que passa em pelo menos 3 dos 9 pontos marcados?



(**A**) 6 (**B**) 15 (**C**) 19

(**D**) 22 (**E**) 27

24. Num triângulo retângulo $[ABC]$, com ângulo reto em A, as bissetrizes dos ângulos agudos intersetam-se num ponto P. Se a distância de P à hipotenusa é $\sqrt{8}$, qual é a distância de P a A?

(**A**) 8 (**B**) 3 (**C**) $\sqrt{10}$ (**D**) $\sqrt{12}$ (**E**) 4

25. Três números com três algarismos cada foram construídos usando os algarismos de 1 a 9, cada um deles exatamente uma vez. Qual dos seguintes valores não pode ser a soma desses três números?

(**A**) 1500 (**B**) 1503 (**C**) 1512 (**D**) 1521 (**E**) 1575

26. Um cubo é decomposto em seis pirâmides por união de um dado ponto do interior do cubo com cada um dos seus vértices. Sabendo que a medida do volume de 5 dessas pirâmides é 2, 5, 10, 11 e 14, qual é a medida do volume da sexta pirâmide?

(**A**) 1 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 9 (**E**) 12

27. A Cristina está a fazer algumas dobragens utilizando uma tira retangular de papel $[ABCD]$, com 5 cm de largura e 50 cm de comprimento. Um dos lados da tira tem cor branca e o outro tem o padrão indicado na segunda figura. Primeiro, ela dobrou a tira de modo a fazer coincidir o vértice B com o ponto médio M do lado $[CD]$ e depois fez coincidir o vértice D com o ponto médio N do lado $[AB]$.

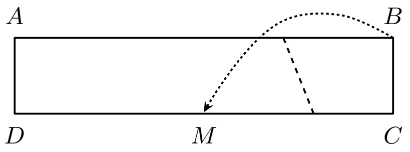


Figura 1

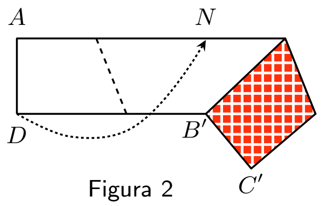


Figura 2

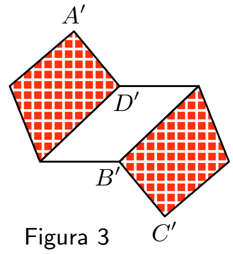


Figura 3

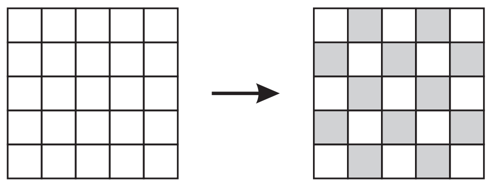
Qual é a área, em cm^2, da parte branca da tira de papel visível na terceira figura?

(**A**) 50 (**B**) 60 (**C**) 62,5 (**D**) 100 (**E**) 125

28. A Ana escolheu um inteiro positivo n e calculou a soma de todos os inteiros positivos de 1 a n. Ela observou que um número primo p divide a soma obtida, mas não divide nenhuma das parcelas. Dos números seguintes, qual pode ser o valor de $n + p$?

(**A**) 217 (**B**) 221 (**C**) 229 (**D**) 245 (**E**) 269

29. O Afonso está a jogar um jogo que consiste em colorir as células de um tabuleiro 5×5 usando as cores branca e cinzenta. Inicialmente todas as células estão brancas. Em cada movimento é permitido mudar a cor de três células consecutivas numa linha ou numa coluna para a outra cor (isto é, se são brancas ficam cinzentas, se são cinzentas passam a brancas). Qual é o menor número de movimentos necessários para obter a coloração em xadrez que se pode ver na figura da direita?



(**A**) Menos de 10 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) Mais de 12

(**E**) É impossível obter esta coloração

30. O número natural N tem exatamente seis divisores positivos distintos incluindo o 1 e o N. O produto de cinco desses divisores é 648. Qual é o sexto divisor de N?

(**A**) 4 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 24