

Canguru Matemático sem Fronteiras 2017

Categoria: Estudante
Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

Duração: 1h 30min

Nome: _____ Turma: _____

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em $1/4$ dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

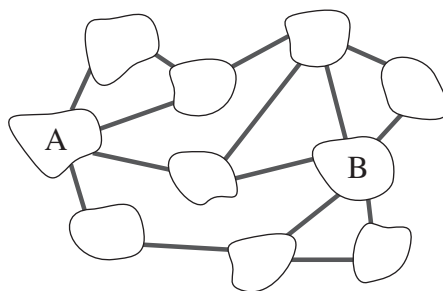
1. Qual é o valor de $\frac{20 \times 17}{2 + 0 + 1 + 7}$?

- (A) 3,4 (B) 17 (C) 34 (D) 201,7 (E) 340

2. O Bernardo gosta de brincar com a sua pista de comboios, que é uma réplica de uma linha de comboio da CP construída à escala 1 : 87. Ele criou alguns modelos, usando a mesma escala, incluindo um modelo, do seu irmão, com 2 cm de altura. Qual é a altura real do seu irmão?

- (A) 1,74 m (B) 1,62 m (C) 1,86 m (D) 1,94 m (E) 1,70 m

3. Na figura estão representadas 10 ilhas ligadas por 15 pontes.



Qual é o menor número de pontes que podem ser eliminadas, por forma a que seja impossível ir de A a B por pontes?

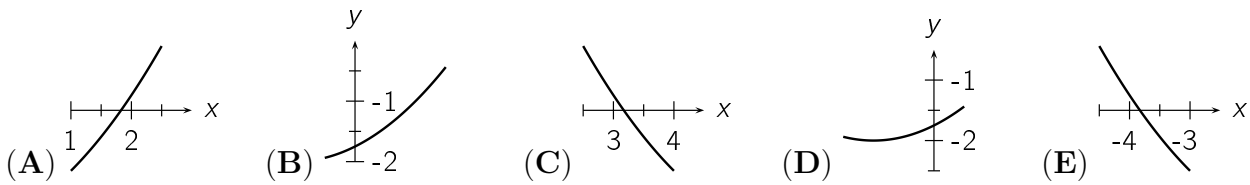
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4. Dois números positivos a e b são tais que 75% de a é igual a 40% de b . Isso significa que:

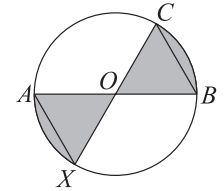
- (A) $15a = 8b$ (B) $7a = 8b$ (C) $3a = 2b$ (D) $5a = 12b$ (E) $8a = 15b$



5. Quatro das cinco imagens seguintes fazem parte do gráfico da mesma função quadrática. Qual é a imagem que não faz parte desse gráfico?

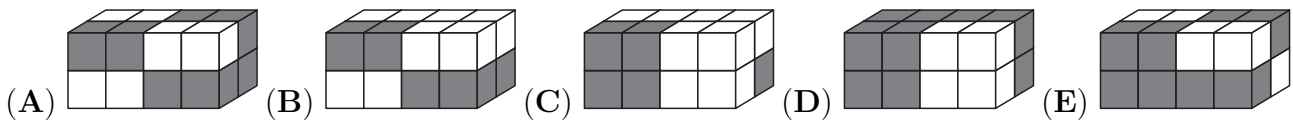
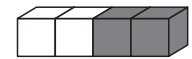


6. No círculo com centro O , representado na figura ao lado, \overline{AB} e \overline{CX} são diâmetros e $\overline{OB} = \overline{BC}$. Que porção da área do círculo está a cinzento?

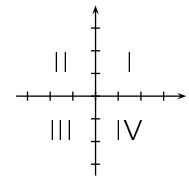


- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{4}{11}$

7. Uma barra é constituída por 4 cubos com as mesmas dimensões, mas diferentes na cor: 2 cubos brancos numa extremidade e 2 cubos cinzentos na outra extremidade, conforme se mostra na figura ao lado. Qual dos seguintes paralelepípedos pode ser construído a partir de 4 destas barras?

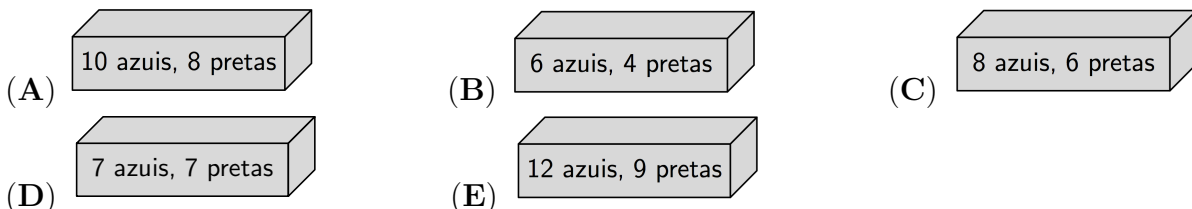


8. Qual é o quadrante que não contém pontos do gráfico da função afim definida por $f(x) = -3,5x + 7$?



- (A) I (B) II (C) III
(D) IV (E) Todos os quadrantes contêm pontos do gráfico de f

9. Cada uma das cinco caixas seguintes contém bolas pretas e bolas azuis, conforme é indicado na respetiva etiqueta. O João pretende retirar, ao acaso, uma bola de uma das caixas. De que caixa deve ele retirar a bola para ter a maior probabilidade de sair uma bola azul?



10. Das funções g_1, g_2, g_3, g_4 e g_5 definidas a seguir, qual é a que tem o gráfico com mais pontos em comum com o gráfico da função definida por $f(x) = x$?

- (A) $g_1(x) = x^2$ (B) $g_2(x) = x^3$ (C) $g_3(x) = x^4$ (D) $g_4(x) = -x^4$ (E) $g_5(x) = -x$

Problemas de 4 pontos

11. Três círculos, mutuamente tangentes, têm centros A , B e C e medidas de raios 3, 2 e 1, respectivamente. Qual é a medida da área do triângulo $[ABC]$?

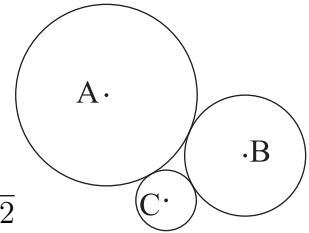
(A) 6

(B) $4\sqrt{3}$

(C) $3\sqrt{2}$

(D) 9

(E) $2\sqrt{6}$



12. O número positivo p é menor do que 1 e o número q é maior do que 1. Qual é o maior dos seguintes números?

(A) $p \cdot q$

(B) $p + q$

(C) $\frac{p}{q}$

(D) p

(E) q

13. Dois cilindros retos, de bases circulares, A e B têm o mesmo volume. O raio da base de B é 10% maior do que o raio da base de A . Quanto maior, em porcentagem, é a altura de A do que a de B ?

(A) 5%

(B) 10%

(C) 11%

(D) 20%

(E) 21%

14. As faces do poliedro representado na figura ao lado são triângulos ou quadrados. Cada quadrado é rodeado por 4 triângulos e cada triângulo é rodeado por 3 quadrados. Se houver 6 quadrados, quantos triângulos existem?

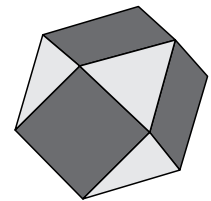
(A) 5

(B) 6

(C) 7

(D) 8

(E) 9



15. Temos quatro dados tetraédricos, perfeitamente equilibrados, com as faces numeradas com os algarismos: 2, 0, 1 e 7. Se jogarmos esses quatro dados, qual é a probabilidade de podermos compor o número 2017 usando exatamente um dos três números visíveis de cada dado?

(A) $\frac{1}{256}$

(B) $\frac{63}{64}$

(C) $\frac{81}{256}$

(D) $\frac{3}{32}$

(E) $\frac{29}{32}$

16. No polinômio $5x^3 + ax^2 + bx + 24$ os coeficientes a e b são números inteiros. Qual dos seguintes números não é certamente uma raiz do polinômio?

(A) 1

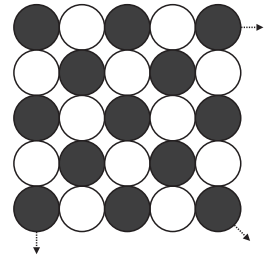
(B) -1

(C) 3

(D) 5

(E) 6

17. A Júlia tem 2017 fichas: 1009 são pretas e as restantes são brancas. Ela coloca-as de modo a formar um padrão quadrangular, como ilustrado na figura, começando com uma ficha preta no canto superior esquerdo e alternando as cores em cada linha e em cada coluna. Quantas fichas de cada cor sobram após a Júlia completar o maior quadrado possível?

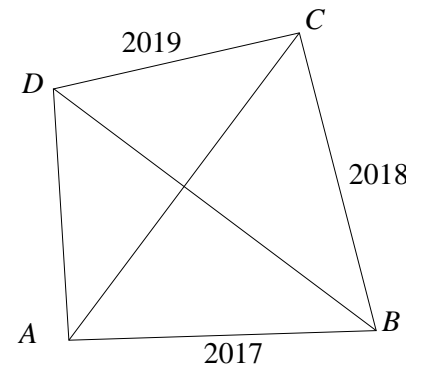


- (A) Nenhuma (B) 40 de cada (C) 40 pretas e 41 brancas
 (D) 41 de cada (E) 40 brancas e 41 pretas

18. Dois números consecutivos são tais que a soma dos algarismos de cada um deles é um múltiplo de 7. Qual é o menor número possível de algarismos do menor dos números?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

19. Num quadrilátero convexo $[ABCD]$ as diagonais são perpendiculares. Os lados têm comprimentos $\overline{AB} = 2017$, $\overline{BC} = 2018$ e $\overline{CD} = 2019$ (a figura não está à escala). Qual é o valor de \overline{AD} ?



- (A) 2016 (B) 2018
 (C) $\sqrt{2020^2 - 4}$ (D) $\sqrt{2018^2 + 2}$
 (E) 2020

20. A Cangui é uma pequena canguru que tenta ser bem comportada, mas admite que mentir é muito divertido. Por isso, em cada três coisas seguidas que diz, uma é mentira e as outras duas são verdadeiras. A Cangui está a pensar num número com dois algarismos e a esse respeito diz à sua amiga: “Um dos seus algarismos é 2.”; “É maior do que 50.”; “É um número par.”; “É menor do que 30.”; “É divisível por três.”; “Um dos seus algarismos é 7.”. Qual é a soma dos algarismos do número em que a Cangui está a pensar?

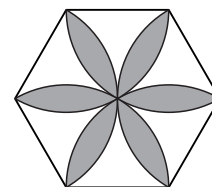
- (A) 9 (B) 12 (C) 13 (D) 15 (E) 17

Problemas de 5 pontos

21. Quantos números inteiros positivos têm a propriedade de que o número obtido ao excluir o último algarismo seja igual a $1/14$ do número original?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

22. Na figura ao lado está representado um hexágono regular com lados de comprimento igual a 1. A flor foi construída com setores circulares com medida de raio igual a 1 e centrados nos vértices do hexágono. Qual é a medida da área da flor?

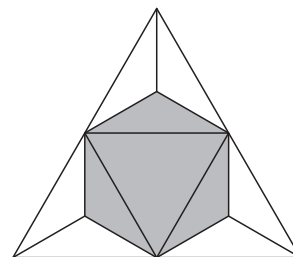


- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $2\sqrt{3} - \pi$ (D) $\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}$ (E) $2\pi - 3\sqrt{3}$

23. Considera a sucessão de termo geral a_n , com $a_1 = 2017$ e $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$, para $n \in \mathbb{N}$. Qual é o valor de a_{2017} ?

- (A) -2017 (B) $\frac{-1}{2016}$ (C) $\frac{2016}{2017}$ (D) 1 (E) 2017

24. Considera um tetraedro regular. Os seus quatro cantos são truncados por quatro planos, cada um passando pelos pontos médios dos três lados adjacentes, conforme é ilustrado na figura. Que parte do volume do tetraedro original é o volume do sólido resultante?



- (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{3}$

25. A soma dos comprimentos dos três lados de um triângulo retângulo é igual a 18 e a soma dos quadrados dos comprimentos dos três lados é igual a 128. Qual é a área do triângulo?

- (A) 18 (B) 16 (C) 12 (D) 10 (E) 9

26. Recebes 5 caixas, 5 bolas pretas e 5 bolas brancas. Podes escolher como colocar as bolas nas caixas, mas cada caixa tem de conter pelo menos uma bola. De seguida, o teu adversário retira uma bola de uma caixa à sua escolha e vence o jogo se a bola retirada for branca. Caso contrário, vences tu. Como deves organizar as bolas nas caixas para teres uma maior probabilidade de vencer?

- (A) Colocas uma bola branca e uma bola preta em cada caixa
 (B) Colocas todas as bolas pretas em três caixas e todas as bolas brancas em duas caixas
 (C) Colocas todas as bolas pretas em quatro caixas e todas as bolas brancas numa caixa
 (D) Colocas uma bola preta em cada uma das caixas e todas as bolas brancas numa caixa
 (E) Colocas uma bola branca em cada uma das caixas e todas as bolas pretas numa caixa

27. São escritos nove números inteiros nas células de uma tabela 3×3 (ver a figura ao lado). A soma dos nove números é igual a 500. Sabe-se que os números em cada duas células vizinhas (isto é, que partilham um lado comum) diferem de 1. Qual é o número que está na célula central?

	?	

- (A) 50 (B) 54 (C) 55 (D) 56 (E) 57

28. Se $|x| + x + y = 5$ e $x + |y| - y = 10$, qual é o valor de $x + y$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

29. Quantos números inteiros positivos de três algarismos ABC existem, tais que $(A + B)^C$ é um número inteiro de três algarismos e uma potência inteira de base 2?

- (A) 15 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 21

30. Cada uma das 2017 pessoas que vivem numa ilha ou é mentirosa (e mente sempre) ou é honesta (e diz sempre a verdade). Mais de mil habitantes da ilha participaram num banquete e todos se sentaram em torno de uma mesa redonda. Cada um deles disse: “Das duas pessoas ao meu lado, uma é mentirosa e a outra é honesta.”. No máximo, quantas pessoas honestas há na ilha?

- (A) 1683 (B) 668 (C) 670 (D) 1344 (E) 1343