

# Canguru Matemático sem Fronteiras 2022

Categoria: Estudante

Duração: 1h 30min

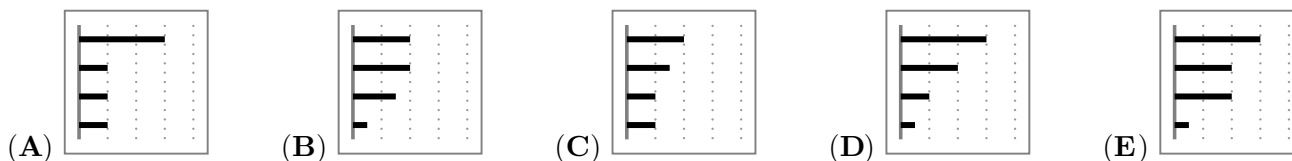
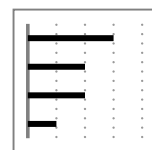
Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

**Não podes usar calculadora.** Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada resposta correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada resposta errada és penalizado em  $\frac{1}{4}$  dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

## Problemas de 3 pontos

1. Numa aplicação que o Henrique tem no telemóvel é possível ver o gráfico com a indicação do tempo que ele despende semanalmente com quatro aplicações que tem instaladas, listadas por ordem decrescente do tempo de utilização. Na figura ao lado está o gráfico respeitante à semana passada. Esta semana ele despendeu exatamente o mesmo tempo que na semana passada com duas das aplicações, mas só metade do tempo com as outras duas. Qual dos diagramas abaixo não pode ser o gráfico correspondente a esta semana?



2. Quantos inteiros positivos com três algarismos são divisíveis por 13?

- (A) 68 (B) 69 (C) 70 (D) 76 (E) 77

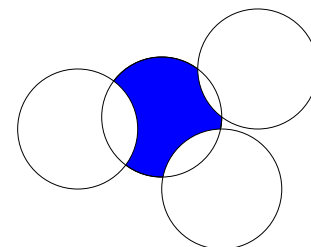
3. Entre quatro amigos sabemos que a Beatriz é mais velha que o Carlos e mais nova que a Luísa. Por outro lado, sabemos que o Tiago é mais velho que a Beatriz. Quem pode ter a mesma idade?

- (A) O Carlos e o Tiago (B) O Tiago e a Luísa (C) A Luísa e o Carlos  
(D) A Beatriz e a Luísa (E) O Tiago e a Beatriz

4. O produto dos algarismos de um número inteiro com dez algarismos é igual a 15. Qual é a soma dos algarismos desse número?

- (A) 8 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 20

5. Quatro circunferências com raio 1 interseccionam-se como se pode ver na figura ao lado. Qual é o perímetro da região sombreada?



- (A)  $\pi$  (B) Um número entre  $\frac{3\pi}{2}$  e  $2\pi$   
(C)  $\frac{3\pi}{2}$  (D)  $2\pi$  (E)  $\pi^2$





6. O Diogo listou, por ordem crescente, todos os inteiros de 2 a 2022 cujos algarismos são iguais ou a 0 ou a 2. Qual é o número que fica no meio da lista?

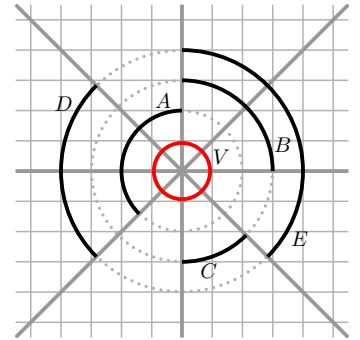
- (A) 200                      (B) 220                      (C) 222                      (D) 2000                      (E) 2002

7. Quantas soluções reais tem a equação  $(x - 2)^2 + (x + 2)^2 = 0$ ?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) 4

8. Quatro retas intersectam-se dando origem a oito ângulos geometricamente iguais. Qual dos arcos a preto tem comprimento igual ao perímetro da circunferência  $V$ ?

- (A) A  
(B) B  
(C) C  
(D) D  
(E) E



9. Sejam  $a, b$  e  $c$  três números não nulos tais que os números  $-2a^4b^3c^2$  e  $3a^3b^5c^{-4}$  têm o mesmo sinal. Qual das seguintes afirmações tem de ser verdadeira?

- (A)  $ab > 0$                       (B)  $b < 0$                       (C)  $c > 0$                       (D)  $bc > 0$                       (E)  $a < 0$

10. O Miguel marcou quatro pontos  $A, B, C$  e  $D$ , por esta ordem, numa reta, como se pode ver na figura abaixo.

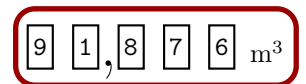


A distância entre  $A$  e  $C$  é 12 cm e entre  $B$  e  $D$  é 18 cm. Qual é a distância entre o ponto médio de  $[AB]$  e o ponto médio de  $[CD]$ ?

- (A) 15 cm                      (B) 12 cm                      (C) 18 cm                      (D) 6 cm                      (E) 9 cm

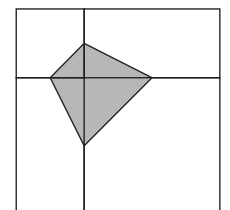
## Problemas de 4 pontos

11. O Pedro foi fazer a leitura do seu contador da água e verificou que no valor marcado todos os algarismos eram diferentes, como se pode ver na figura ao lado. Que quantidade mínima de água tem o Pedro de gastar para que numa próxima contagem o valor da leitura tenha também todos os algarismos diferentes?



- (A) 0,006 m<sup>3</sup>                      (B) 0,034 m<sup>3</sup>                      (C) 0,086 m<sup>3</sup>                      (D) 0,137 m<sup>3</sup>                      (E) 1,048 m<sup>3</sup>

12. Um quadrado foi dividido de modo a obter dois quadrados de tamanhos diferentes e dois retângulos geometricamente iguais, como se pode ver na figura ao lado. Os vértices do quadrilátero a sombreado são os pontos médios dos lados dos dois quadrados obtidos. A medida da área do quadrilátero sombreado é 3. Qual é a medida da área da parte não sombreada do quadrado inicial?



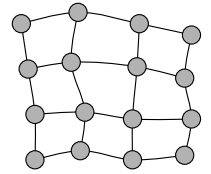
- (A) 12                      (B) 15                      (C) 18                      (D) 21                      (E) 24



13. Qual é o maior divisor comum entre  $2^{2021} + 2^{2022}$  e  $3^{2021} + 3^{2022}$ ?

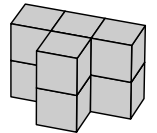
- (A)  $2^{2021}$       (B) 1      (C) 2      (D) 6      (E) 12

14. No mapa ao lado está representada uma região com 16 cidades ligadas por 24 estradas. O governo quer construir centrais elétricas em algumas das cidades. Cada central pode fornecer eletricidade suficiente para a cidade onde está localizada e para quaisquer cidades ligadas a essa por uma única estrada. Qual é o menor número de centrais elétricas que precisam ser construídas?



- (A) 3      (B) 4      (C) 5      (D) 6      (E) 7

15. Qual dos pares de peças representados abaixo pode ser usado para construir a peça representada na figura ao lado?

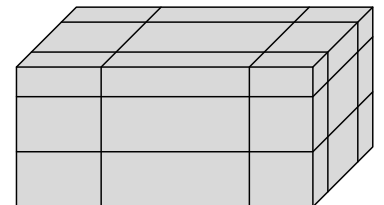


- (A)      (B)      (C)
- (D)      (E)

16. A Mariana está a participar num torneio de ténis com 8 jogadores. Ela sabe que irá vencer a todos os jogadores, exceto à Ana que vence a todos os jogadores. Na primeira partida os jogadores são organizados ao acaso em quatro pares, que jogam entre si. O vencedor de cada jogo passa para a segunda partida. Na segunda partida, há dois jogos e o vencedor de cada jogo passa à final. Qual é a probabilidade da Mariana não chegar à final?

- (A) 1      (B)  $1/2$       (C)  $2/7$       (D)  $3/7$       (E)  $4/7$

17. Um cubo cuja medida da área de superfície é  $S$  foi cortado por seis planos, como se pode ver na figura ao lado. Cada plano é paralelo a uma face, mas a distância do plano à face é obtida de forma aleatória. No final o cubo é separado em 27 paralelepípedos. Qual é a medida da área da superfície total desses 27 paralelepípedos, em função de  $S$ ?

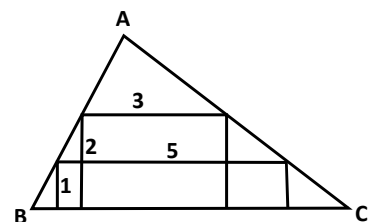


- (A)  $2S$       (B)  $\frac{5}{2}S$       (C)  $3S$       (D)  $4S$
- (E) Nenhuma das hipóteses anteriores

18. A média de cinco números é 24. A média dos três menores é 19 e a média dos três maiores é 28. Qual é a mediana dos 5 números?

- (A) 20      (B) 21      (C) 22      (D) 23      (E) 24

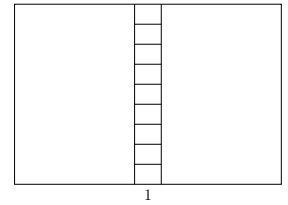
19. Num triângulo  $[ABC]$  foram inscritos dois retângulos. As dimensões dos retângulos são  $1 \times 5$  e  $2 \times 3$ , respetivamente, como se pode ver na figura ao lado. Qual é a altura do triângulo em relação à base  $[BC]$ ?



- (A) 3      (B)  $\frac{7}{2}$       (C)  $\frac{8}{3}$       (D)  $\frac{16}{5}$
- (E) Nenhuma das hipóteses anteriores



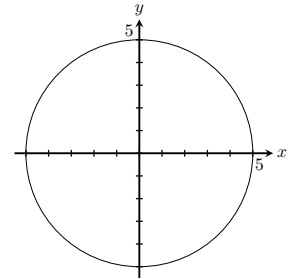
20. Um retângulo foi dividido em 11 retângulos mais pequenos, como se pode ver na figura ao lado. Os 11 retângulos são semelhantes ao retângulo inicial. A orientação dos retângulos mais pequenos é a mesma do retângulo inicial. Se o comprimento da base dos retângulos mais pequenos é 1, qual é o perímetro do retângulo maior?



- (A) 20                      (B) 24                      (C) 27                      (D) 30                      (E) 36

### Problemas de 5 pontos

21. Uma circunferência de centro  $(0, 0)$  tem raio 5. Quantos pontos da circunferência têm como coordenadas dois números inteiros?

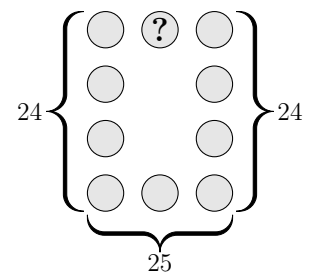


- (A) 5                              (B) 8                              (C) 12  
(D) 16                              (E) 20

22. Quantos números inteiros positivos com 3 algarismos são iguais a cinco vezes o produto dos seus algarismos?

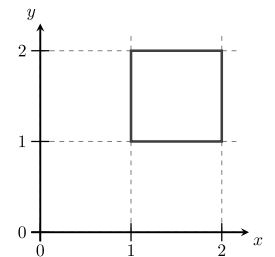
- (A) 1                              (B) 2                              (C) 3                              (D) 4                              (E) 5

23. Os números de 1 a 10 irão ser escritos nos círculos da figura ao lado, um em cada círculo. A soma dos números da coluna da esquerda tem de ser 24; a soma dos números da coluna da direita tem de ser também 24 e a soma dos números da linha de baixo tem de ser 25. Que número tem de ser escrito no círculo com o ponto de interrogação?



- (A) 2                              (B) 4                              (C) 5  
(D) 6                              (E) Nenhuma das hipóteses anteriores

24. Um quadrado está desenhado num referencial ortonormado, como se pode ver na figura ao lado. Cada ponto  $(x, y)$  do quadrado é transformado no ponto  $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ . Que figura se obtém?



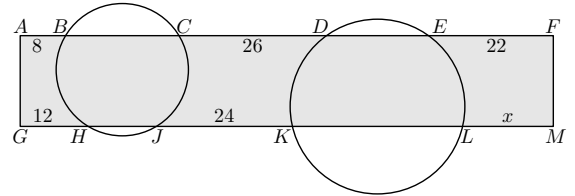
- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E)



25. Os vértices de um polígono com 20 lados foram numerados de 1 a 20 de tal modo que vértices adjacentes diferem ou em 1 unidade ou em 2 unidades. Os lados do polígono adjacentes a vértices que diferem em 1 unidade foram pintados de vermelho. Quantos lados vermelhos tem este polígono?

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 5                      (D) 10  
(E) Existem várias possibilidades

26. Dois círculos interseitam o retângulo  $[AFMG]$ , como se pode ver na figura ao lado. Os segmentos exteriores aos círculos têm os seguintes comprimentos:  $\overline{AB} = 8$ ,  $\overline{CD} = 26$ ,  $\overline{EF} = 22$ ,  $\overline{GH} = 12$  e  $\overline{JK} = 24$ . Qual é o comprimento de  $[LM]$ ?



- (A) 14      (B) 15      (C) 16      (D) 17      (E) 18

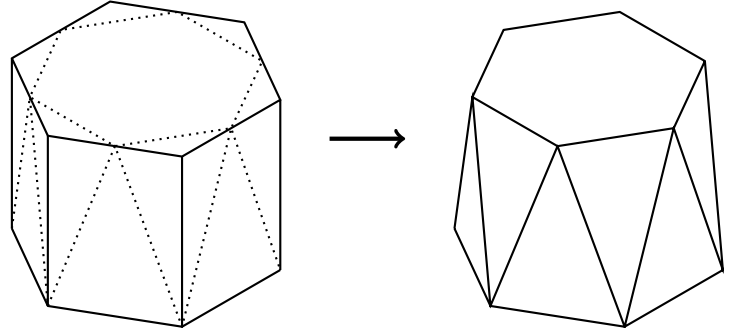
27. Seja  $N$  um número inteiro positivo. Quantos números inteiros existem entre  $\sqrt{N^2 + N + 1}$  e  $\sqrt{9N^2 + N + 1}$ ?

- (A)  $N + 1$               (B)  $2N - 1$               (C)  $2N$               (D)  $2N + 1$               (E)  $3N$

28. Numa sucessão  $(a_n)$ , o primeiro termo,  $a_1$ , está entre 0 e 1. Para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$  e  $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$ . Se  $a_7 = 2$ , qual é o valor de  $a_2$ ?

- (A) Igual a  $a_1$               (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) 5

29. Num prisma hexagonal regular foram cortados os cantos superiores, como se pode ver na figura ao lado. A face superior do sólido transformou-se num hexágono regular mais pequeno e as 6 faces laterais retangulares transformaram-se em 12 triângulos isósceles de dois tamanhos diferentes. Que fração do volume do sólido original foi perdida?



- (A)  $\frac{1}{12}$       (B)  $\frac{1}{6}$       (C)  $\frac{1}{4\sqrt{3}}$       (D)  $\frac{1}{6\sqrt{2}}$   
(E)  $\frac{1}{6\sqrt{3}}$

30. Um jogo de futebol entre as equipas do Norte de Cangu e do Sul de Cangu está a ser disputado num estádio cuja bancada tem a forma de um retângulo. Há 11 apoiantes do Norte de Cangu em cada linha da bancada e 14 apoiantes do Sul de Cangu em cada coluna da bancada. Esta disposição dos apoiantes deixou 17 lugares vazios. Qual é o menor número possível de lugares na bancada?

- (A) 500                      (B) 660                      (C) 690                      (D) 840                      (E) 994