



# XVIII CONCURSO CANGURO MATEMÁTICO 2011



Nivel 6 (2º de Bachillerato)

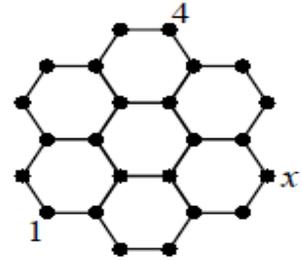
Día 17 de marzo de 2011. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

**Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.**

**1**

Hay que escribir un número en cada uno de los puntos mostrados en la figura, de manera que la suma de los números en los extremos de cada segmento sea la misma? Como se ve, se han marcado ya dos números. ¿Qué número debe escribirse en el punto llamado x?



- A) 1    B) 3    C) 4    D) 5    E) no hay suficiente información

**2**

Tres pilotos toman parte en una carrera: Michael, Fernando y Sebastián. Inmediatamente después de la salida, Michael era primero, Fernando segundo y Sebastián tercero. Durante la carrera, Michael y Fernando intercambiaron sus puestos 9 veces, Fernando y Sebastián 10 veces, y Michael y Sebastián 11 veces. ¿En qué orden terminaron la carrera?

- A) Michael, Fernando, Sebastián    B) Fernando, Sebastián, Michael    C) Sebastián, Michael, Fernando  
D) Sebastián, Fernando, Michael    E) Fernando, Michael, Sebastián

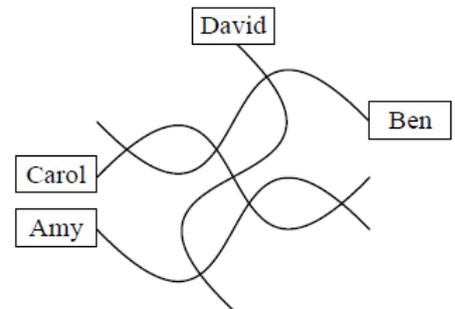
**3**

Si  $2^x = 15$ , y  $15^y = 32$ , ¿cuál es el valor de  $xy$ ?

- A) 5    B)  $\log_2 15 + \log_{15} 32$     C)  $\log_2 47$     D) 7    E)  $47^{1/2}$

**4**

Durante una excursión en barco, bastante movida, Lali intenta dibujar un mapa de su pueblo. Consigue, con muchas fatigas, dibujar las cuatro calles, sus 7 intersecciones, y las casas de sus amigos. Sin embargo, la calle de la Flecha, la del Escudo y la del Pavo son perfectamente rectas. La cuarta calle es la calle de las Curvas. ¿Quién vive en esta última calle?



- A) Amy    B) Ben    C) Carol    D) David  
E) para poderlo decir, haría falta un mapa mejor dibujado

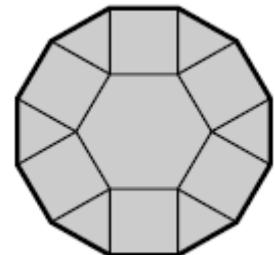
**5**

Los números de 4 cifras cuyos dígitos suman 4 se colocan en una lista en orden decreciente. ¿Qué lugar ocupa el número 2011?

- A) Sexto    B) séptimo    C) octavo    D) noveno    E) décimo

**6**

La figura muestra una pieza formada por un hexágono regular de lado 1, seis triángulos y seis cuadrados: ¿Cuánto mide el perímetro (en trazo grueso) de la pieza?



- A)  $6 \cdot (1 + \sqrt{2})$     B)  $6 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$     C) 12    D)  $6 + 3 \cdot \sqrt{2}$     E) 9

**7**

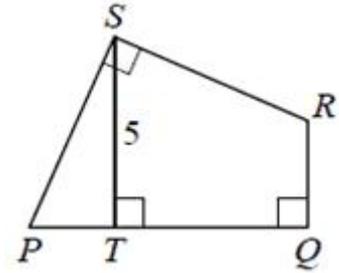
Lali escribe en el encerado todos los números desde 1 a 2011 y Matías borra todos los múltiplos de 3. ¿Cuántos números quedan sin borrar?

- A) 335    B) 671    C) 1341    D) 1342    E) 1431

8

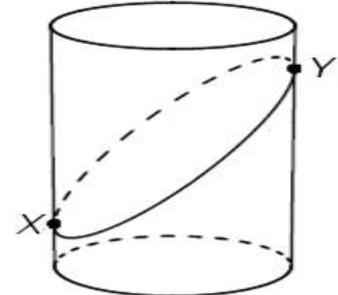
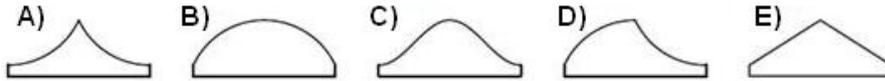
En el cuadrilátero SPQR de la figura,  $PS = SR$ , el ángulo PSR es igual al PQR y ambos miden  $90^\circ$ , ST es perpendicular a PQ y  $ST = 5$ . El área de SPQR es

- A) 20      B) 22,5      C) 25      D) 27,5      E) 30



9

Una hoja rectangular de papel se enrolla sobre un cilindro y un plano corta al papel y al cilindro, como se ve en la figura. El plano de corte pasa por los puntos X e Y. La parte inferior del papel se desenrolla. Lo que se ve es



10

Max y Hugo lanzan unos dados para decidir quien se zambulle primero en el lago, de aguas muy frías. Si no salen seises, será Max. Si sale un solo seis, será Hugo. Y si salen dos o más seises, no se bañan en el lago. ¿Cuántos dados hay que lanzar, para que las probabilidades de meterse primero en el lago, de Max y Hugo, sean iguales?

- A) 3      B) 5      C) 8      D) 9      E) 17

**Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una**

11

Se van a combinar tres rectángulos, sin agujeros ni solapamientos, para formar un rectángulo grande. Uno de los tres rectángulos mide  $7 \times 11$ , y otro  $4 \times 8$ . El tercero se elige de modo que el rectángulo combinado tenga la mayor área posible. ¿Cuáles son las dimensiones del tercer rectángulo?

- A)  $1 \times 11$       B)  $3 \times 4$       C)  $3 \times 8$       D)  $7 \times 8$       E)  $7 \times 11$

12

Se escriben enteros en las casillas de una tabla  $3 \times 3$  de modo que la suma de los números en cada cuadrado  $2 \times 2$  sea igual a 10. En la figura aparecen escritos 4 de los números. ¿Cuál de los siguientes valores puede ser la suma de los cinco números que faltan?

	2	
1		3
	4	

- A) 9      B) 10      C) 12      D) 13      E) Ninguno de los anteriores es posible

13

48 niños van a una excursión. Seis de ellos tienen exactamente un hermano en la excursión; nueve tienen exactamente dos hermanos en la excursión y cuatro tienen exactamente tres hermanos en la excursión. El resto no tienen hermanos en la excursión. ¿Cuántas familias hay en la excursión?

- A) 19      B) 25      C) 31      D) 36      E) 48

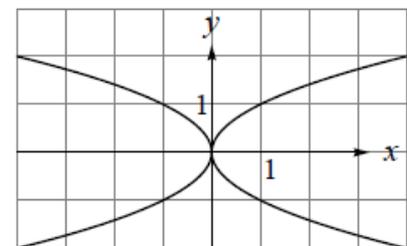
14

De las ocho siguientes funciones

$$y = x^2, y = -x^2, y = \sqrt{x}, y = -\sqrt{x},$$

$$y = \sqrt{-x}, y = -\sqrt{-x}, y = \sqrt{|x|}, y = -\sqrt{|x|}$$

¿cuántas tienen su gráfica incluida en la figura siguiente



- A) Ninguna      B) 2      C) 4      D) 6      E) 8

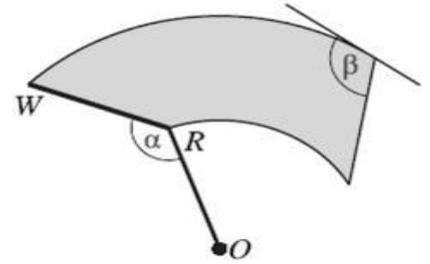
15

En la expresión  $\frac{K \times A \times N \times G \times A \times R \times O \times O}{G \times A \times M \times E}$  (letras distintas representan cifras distintas no nulas, y letras iguales, cifras iguales). ¿Cuál es el menor valor entero positivo de esa expresión?

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 5      E) 7

16

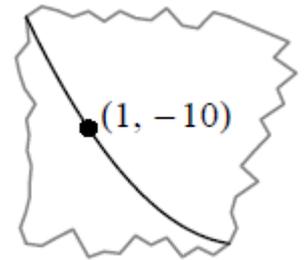
El limpiaparabrisas trasero de un auto está construido de manera que la varilla con el cepillo RW y la varilla giratoria de sujeción OR tienen la misma longitud y forman un ángulo  $\alpha$  fijo. El artefacto pivota alrededor del centro O y limpia el área sombreada, como se indica en la figura. Determinar el ángulo  $\beta$  entre el límite derecho del área limpiada y la tangente a la curva superior.



- A)  $\frac{3\pi - \alpha}{2}$     B)  $\pi - \frac{\alpha}{2}$     C)  $\frac{3\pi}{2} - \alpha$     D)  $\frac{\pi}{2} + \alpha$     E)  $\pi + \frac{\alpha}{2}$

17

En el plano  $(x,y)$ , con los ejes de coordenadas en la forma usual, se ha marcado el punto  $A(1,-10)$  de la parábola  $y = ax^2 + bx + c$ . Después, se borran los ejes de coordenadas y casi toda la parábola, quedando sólo el trozo de la figura. ¿Cuál de las siguientes proposiciones puede ser falsa?



- A)  $a > 0$     B)  $b < 0$     C)  $a + b + c < 0$     D)  $b^2 > 4ac$     E)  $c < 0$

18

Los lados PQ, QR, RS, ST, TU, y UP de un hexágono son tangentes a una circunferencia inscrita. Las longitudes de los lados PQ, QR, RS, ST y TU son 4, 5, 6, 7 y 8, respectivamente. ¿Cuánto mide el lado UP?

- A) 9    B) 8    C) 7    D) 6    E) No se puede calcular a partir de esos datos

19

Hallar la suma de todos los enteros positivos  $x$  menores que 100 para los que  $x^2 - 81$  es múltiplo de 100.

- A) 200    B) 100    C) 90    D) 81    E) 50

20

Dos hermanos varones dan respuestas verdaderas a una pregunta sobre cuántos miembros tiene su club de ajedrez. A dice: "todos los miembros del club, excepto 5 chicas, son chicos". B dice: "En todo grupo de seis miembros del club hay por lo menos 4 chicas". ¿Cuántos miembros hay en el club?

- A) 6    B) 7    C) 8    D) 12    E) 81

**Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una**

21

En una bolsa se tienen varias bolas. En cada bola hay escrito un entero positivo (todos los enteros que se han escrito son distintos). En 30 bolas los números son divisibles por 6; en 20, son divisibles por 7; y sólo en 10 son divisibles por 42. ¿Cuál es el menor número posible de bolas en la bolsa?

- A) 30    B) 40    C) 53    D) 54    E) 60

22

Se consideran las dos progresiones aritméticas 5, 20, 35, ... y 35, 61, 87, ... ¿Cuántas progresiones aritméticas diferentes de enteros positivos hay de manera que esas dos sean subsucesiones suyas?

- A) 1    B) 3    C) 5    D) 26    E) infinitas

23

La sucesión de funciones numéricas  $f_1(x), f_2(x), \dots$  satisface las dos condiciones siguientes:

i)  $f_1(x) = x$     y    ii)  $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)}$

¿Cuál es el valor de  $f_{2011}(2011)$ ?

- A) 2011    B)  $-\frac{1}{2010}$     C)  $\frac{2010}{2011}$     D) 1    E) -2011

**24** Una caja contiene bolas rojas y verdes. Si elegimos al azar dos bolas de la caja, la probabilidad de que sean del mismo color es  $\frac{1}{2}$ . ¿Cuál de los siguientes números puede ser el número total de bolas de la caja?

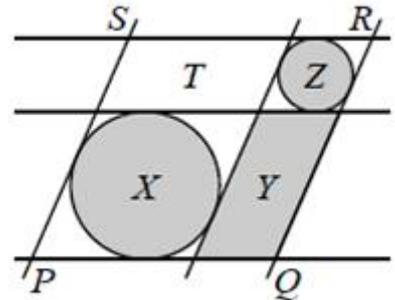
- A) 81      B) 101      C) 1000      D) 2011      E) 10001

**25** Una compañía aérea no cobra por el equipaje si su peso es inferior a un cierto valor (en kg). Por cada kg extra se cobra una tarifa. El equipaje del matrimonio A pesa 60 kg y pagan 3 euros. El equipaje del Sr. B pesa lo mismo, pero él paga 10.50 euros. ¿Cuál es el peso máximo del equipaje que un pasajero puede llevar sin pagar?

- A) 10 kg      B) 18 kg      C) 20 kg      D) 25 kg      E) 39 kg

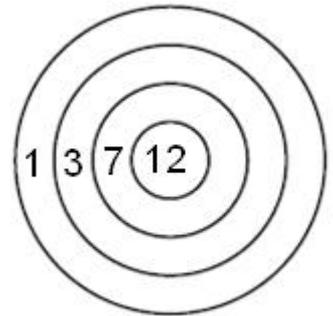
**26** La figura muestra tres rectas horizontales paralelas y tres inclinadas, paralelas también. Cada círculo es tangente a cuatro de las rectas. Las áreas de las figuras sombreadas son X, Y, Z, como se indica, y W es el área del paralelogramo PQRS. ¿Cuál es el menor número de áreas, de entre X, Y, Z, y W, que hay que conocer para poder calcular el área T del paralelogramo indicado?

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4  
E) T no se puede calcular con esos 4 datos



**27** Robin Hood lanza tres flechas al blanco, obteniendo los puntos que se indican en la figura si se clavan en las zonas indicadas: Las tres flechas alcanzan el blanco. ¿Cuántas puntuaciones diferentes puede obtener Robin de esta forma?

- A) 13      B) 17      C) 19      D) 20      E) 21



**28** Sean  $a, b, c$  enteros positivos tales que  $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ . ¿cuál es el menor número posible de divisores de  $abc$  (incluyendo 1 y  $abc$ )?

- A) 30      B) 49      C) 60      D) 77      E) 1596

**29** En una tabla  $4 \times 5$  se escriben veinte enteros positivos distintos. Cualquiera dos números que estén en casillas con un lado común tienen un divisor común mayor que 1. Si  $n$  es el mayor número de la tabla, hallar el menor valor que puede tomar  $n$

- A) 21      B) 24      C) 26      D) 27      E) 40

**30** Un cubo  $3 \times 3 \times 3$  está formado por 27 cubitos iguales. Un plano es perpendicular a una diagonal del cubo y pasa por su centro. ¿A cuántos cubitos interseca?

- A) 17      B) 18      C) 19      D) 20      E) 21