



XXIII CONCURSO CANGURO MATEMÁTICO 2016



Nivel 6 (2º de Bachillerato.)

Día 17 de marzo de 2016. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.

1 El entero positivo N tiene exactamente seis divisores positivos distintos, incluyendo a 1 y a N . El producto de cinco de ellos es 648. ¿Cuál de los siguientes es el sexto divisor de N ?

- A) 4 B) 8 C) 9 D) 12 E) 24

2 La suma de las edades de Tomás y Juan es 23, la de las de Juan y Alex es 24 y la de las de Tomás y Alex es 25. ¿Cuál es la edad del mayor de los tres?

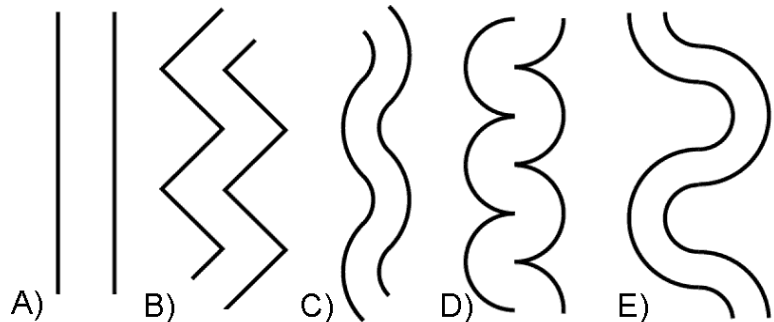
- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

3 La suma de $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ es:

- A) $\frac{3}{11}$ B) $\frac{111}{1110}$ C) $\frac{111}{1000}$ D) $\frac{3}{1000}$ E) $\frac{3}{1110}$

4 María quiere construir un puente para cruzar un río y sabe que la longitud del puente más corto desde cualquier punto de una orilla es siempre la misma.

¿Cuál de las figuras de la derecha no puede ser la del río de María?

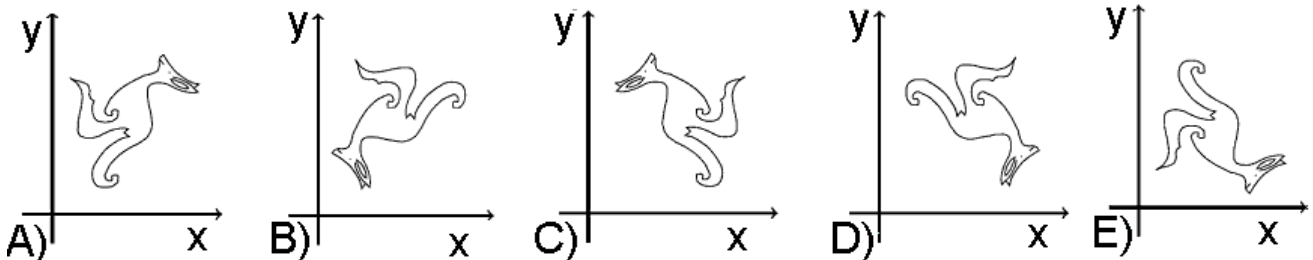
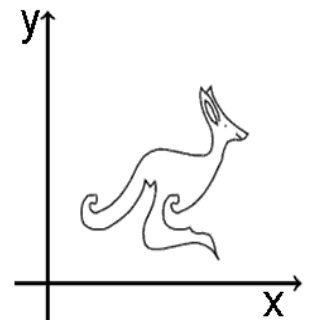


5 ¿Cuántos enteros hay mayores que 2015×2017 pero menores que 2016×2016 ?

- A) 0 B) 1 C) 2015 D) 2016 E) 2017

6 Un conjunto de puntos con la figura del canguro se sitúa en el plano xy como se muestra en la figura de la derecha.

Para cada punto, se intercambian las coordenadas x e y .
¿Cuál de los siguientes es el resultado?



7

¿Cuál es el menor número de planos necesarios para limitar una parte acotada (de más de un punto) en el espacio tridimensional?

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

8

Diana quiere escribir nueve enteros en los círculos de la figura de manera que, para los ocho triángulos cuyos vértices se unen por segmentos, las sumas de los números en sus vértices sean iguales. ¿Cuál es el mayor número de enteros distintos que puede usar?

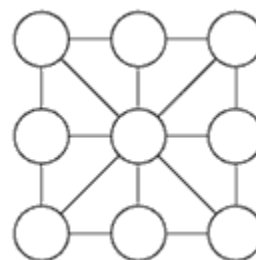
A) 1

B) 2

C) 3

D) 5

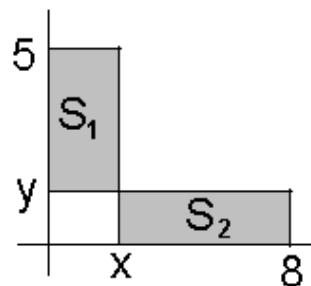
E) 8



9

Los rectángulos S_1 y S_2 de la figura tienen la misma área. ¿Cuál de los siguientes números es el valor del cociente $\frac{x}{y}$?

A) 1

B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{8}{5}$ 

10

Si $x^2 - 4x + 2 = 0$, entonces $x + \frac{2}{x}$ es igual a

A) -4

B) -2

C) 0

D) 2

E) 4

Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una

11

a, b, c y d son enteros positivos tales que $a + 2 = b - 2 = 2c = d/2$. ¿Cuál de los números a, b, c y d es el mayor?

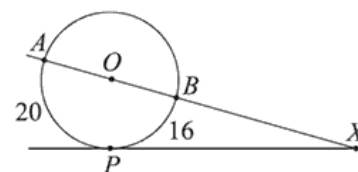
A) a B) b C) c D) d

E) No se puede calcular

12

Las longitudes de los arcos AP y BP de la figura son 20 y 16, respectivamente.

La medida en grados del ángulo AXP es

A) 30° B) 24° C) 18° D) 15° E) 10° 

13

En esta pirámide de bloques de la derecha, cada uno tiene un número que es el producto de los dos en los que se apoya.

¿Cuál de los siguientes números no puede aparecer en el bloque superior, si los tres números de la fila inferior son números naturales mayores que 1?

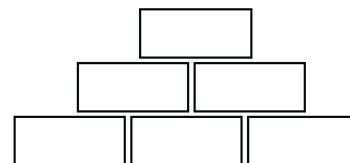
A) 56

B) 84

C) 90

D) 105

E) 220



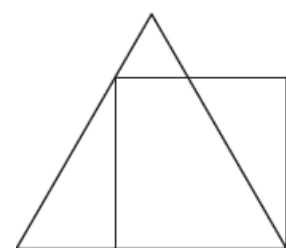
14

¿Cuánto vale x_4 , si $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = x_n^{(x_n)}$ para n mayor o igual que 1?

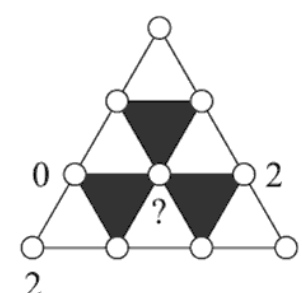
A) $2^{(2^3)}$ B) $2^{(2^4)}$ C) $2^{(2^{11})}$ D) $2^{(2^{16})}$ E) $2^{(2^{768})}$

- 15** En el rectángulo ABCD la longitud del lado BC es la mitad de la longitud de la diagonal AC. Sea M un punto de CD tal que $AM = MC$. La medida en grados del ángulo CAM es
- A) $12,5^\circ$ B) 15° C) $27,5^\circ$ D) $42,5^\circ$ E) 30°
- 16** Diana corta un rectángulo de área 2016 en 56 cuadrados iguales. Las longitudes de los lados del rectángulo y de los cuadrados son enteros. ¿Para cuántos rectángulos diferentes es posible hacer esto?
- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 0
- 17** Cada uno de los habitantes de la Isla de los Caballeros y Escuderos es, o bien un caballero (que siempre dice la verdad) o un escudero (que siempre miente). Durante tu viaje a la isla, encuentras a 7 personas en torno a una fogata. Los siete te dicen: "Estoy sentado entre dos escuderos". ¿Cuántos escuderos hay en el grupo?
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Necesitas más información
- 18** Las ecuaciones $x^2 + ax + b = 0$ y $x^2 + bx + a = 0$ tienen, ambas, raíces reales. Se sabe que la suma de los cuadrados de las raíces de la primera ecuación es igual a la suma de los cuadrados de las raíces de la segunda, y a es distinto de b . Entonces $a + b$ es igual a
- A) 0 B) -2 C) 4 D) -4 E) Imposible saberlo

- 19** Si el perímetro del cuadrado de la figura es 4, entonces el perímetro del triángulo equilátero es
- A) 4 B) $3 + \sqrt{3}$ C) 3 D) $3 + \sqrt{2}$ E) $4 + \sqrt{3}$

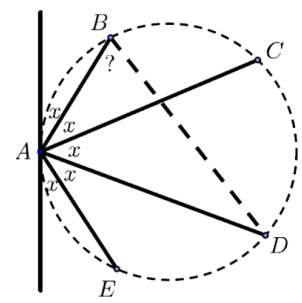


- 20** Cada uno de los diez puntos de la figura está marcado con uno de los tres números 0, 1 ó 2. Se sabe que la suma de los números en los vértices de cualquier triángulo blanco es divisible por 3, mientras que la suma de los números en los vértices de cualquier triángulo negro NO es divisible por 3. En la figura hay marcados tres puntos. ¿Qué números se pueden usar para marcar el punto central?
- A) Únicamente el 0 B) Únicamente el 1 C) Únicamente el 2
D) Solo el 0 y el 1 E) Cualquiera de los tres números 0, 1 o 2.



Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una

- 21** Beatriz dibuja cinco puntos A, B, C, D y E en una circunferencia así como la tangente a la circunferencia en A, como se muestra en la figura, de tal manera que los cinco ángulos marcados con x son iguales (el dibujo no está a escala). ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo ABD?
- A) 66° B) $70,5^\circ$ C) 72° D) 75° E) $77,5^\circ$



- 22** ¿Cuántas soluciones distintas tiene la ecuación $(x^2 - 4x + 5)^{x^2 + x - 30} = 1$?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Infinitas

23

Un cuadrilátero tiene un círculo inscrito (un círculo tangente a los cuatro lados del cuadrilátero). La razón entre el perímetro del cuadrilátero y la longitud de la circunferencia es $\frac{4}{3}$.

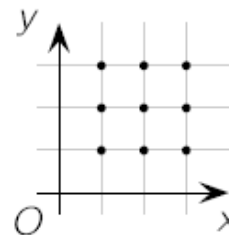
Entonces, la razón del área del cuadrilátero a la del círculo es

- A) $\frac{4}{\pi}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$ C) $\frac{16}{9}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

24

¿Cuántas funciones cuadráticas en x tienen una gráfica que pasa al menos por tres de los puntos marcados en la figura?

- A) 6 B) 15 C) 19 D) 22 E) 27



25

En un triángulo ABC, rectángulo en A, las bisectrices de los ángulos agudos se cortan en un punto P. Si la distancia de P a la hipotenusa es $8^{1/2}$, ¿cuál es la distancia desde P al vértice A?

- A) 8 B) 3 C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{12}$ E) 4

26

Con las cifras de 1 a 9 (usando cada cifra exactamente una vez) se forman tres números de tres cifras. ¿Cuál de los siguientes NO puede ser la suma de esos tres números?

- A) 1500 B) 1503 C) 1512 D) 1521 E) 1575

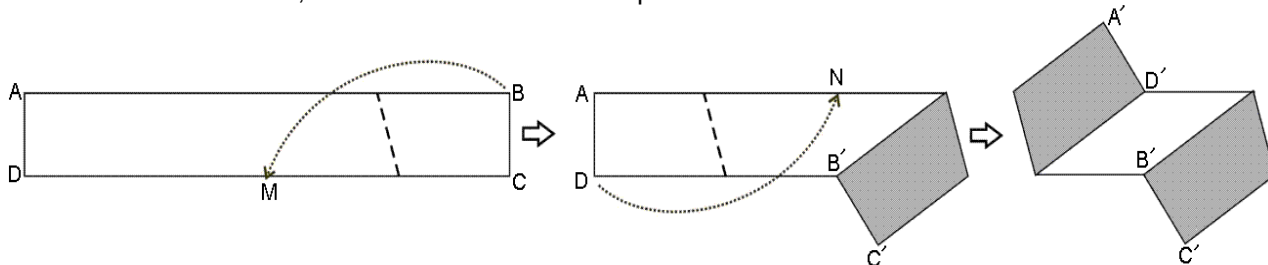
27

Se descompone un cubo en 6 pirámides uniendo un punto interior con cada uno de los vértices del cubo. Los volúmenes de cinco de esas pirámides son 2, 5, 10, 11 y 14. ¿Cuál es el volumen de la sexta pirámide?

- A) 1 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

28

La tira rectangular ABCD de 5 cm de ancho y 50 cm de largo es blanca por el lado mostrado en la primera figura y gris por el otro. Doblando la tira, Cristina hace coincidir el vértice B con el punto medio M del lado CD. Doblándola otra vez, el vértice D coincide con el punto medio N del lado AB.



¿Cuál es el área, en cm^2 , de la parte visible blanca de la última figura?

- A) 50 B) 60 C) 62,5 D) 100 E) 125

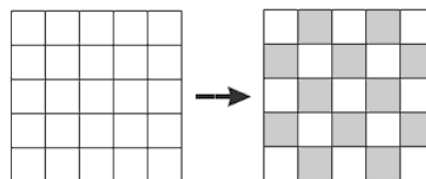
29

Ana elige un entero positivo n y escribe la suma de todos los enteros positivos desde 1 hasta n . Un número primo p divide a la suma, pero no a ninguno de los sumandos. ¿Cuál de los siguientes puede ser $n + p$?

- A) 217 B) 221 C) 229 D) 245 E) 269

30

Se considera el cuadrado 5×5 dividido en 25 casillas. Inicialmente, todas las casillas son blancas. En cada movimiento, se permite cambiar el color de tres casillas consecutivas cualesquiera en una fila o en una columna, al color opuesto (o sea, de blanca a negro y de negro a blanco). ¿Cuál es el menor número posible de movimientos necesario para obtener el ajedrezado aspecto del tablero de la derecha?



- A) Menos de 10 B) 10 C) 12 D) Más de 12 E) Es imposible conseguirlo